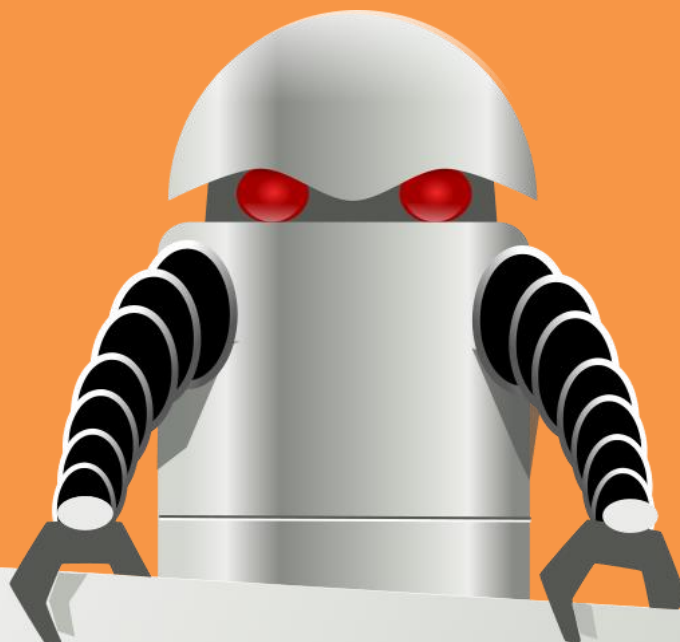


STŘEDNÍ PRŮMYSLOVÁ ŠKOLA STROJNICKÁ A STŘEDNÍ ODBORNÁ ŠKOLA  
PROFESORA ŠVEJCARA, PLZEŇ, KLATOVSKÁ 109



**Josef Gruber**

# **MECHANIKA II**

## **PRUŽNOST A PEVNOST**

Vytvořeno v rámci Operačního programu Vzdělávání pro konkurenceschopnost  
CZ.1.07/1.1.30/01.0038 Automatizace výrobních procesů ve strojírenství a řemeslech



INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ



Dílo podléhá licenci Creative Commons Uveďte autora-Nevyužívejte dílo komerčně-Zachovejte licenci 3.0 Česko.



# OBSAH

## PRUŽNOST A PEVNOST

1. Obsah pružnosti a pevnosti .....	4
2. Vnější a vnitřní síly, napětí.....	6
3. Základní druhy namáhání.....	9
4. Zkouška prostým tahem .....	13
5. Pružná deformace v tahu a Hookův zákon .....	18
6. Namáhání tahem .....	20
7. Namáhání tlakem .....	24
8. Měrný tlak ve stykových plochách .....	27
9. Některé zvláštní případy tahu a tlaku .....	29
10. Namáhání smykem .....	34
11. Namáhání kruhových průřezů na krut .....	39
12. Namáhání na ohyb .....	45
13. Kombinované namáhání.....	65
14. Koncentrace napětí .....	71
15. Únavové porušení způsobené proměnným zatížením .....	73
16. Určení dynamické bezpečnosti .....	78
17. Stabilita tvaru, vzpěr.....	87
18. Použitá literatura.....	96



# PRUŽNOST A PEVNOST

## 1. OBSAH PRUŽNOSTI A PEVNOSTI

Obsah této kapitoly:

- Základní úkoly pružnosti a pevnosti
- Historické poznámky
- Mechanické vlastnosti materiálů

### Základní úkoly pružnosti a pevnosti



Pružností a pevností nazýváme **mechaniku tuhých deformovatelných těles**. Pružnost a pevnost jsou dvě základní mechanické vlastnosti materiálu. Úkolem pružnosti a pevnosti je rozbor vlivu zatížení tělesa na jeho deformace a namáhání s ohledem na riziko mezních stavů a cílem je pak dimenzování součástí.

---

**Dimenzování součástí v sobě zahrnuje volbu materiálu a návrh vhodného tvaru a rozměrů součástí s ohledem na působící zatížení.**

---

Obr. 1

Úkolem konstruktéra je navrhnout zařízení tak, aby nejen splňovalo požadované technické parametry, ale aby zároveň bylo bezpečné, snadno vyrobitelné a vyhovovalo jak po stránce pořizovací ceny, tak provozních nákladů. Velmi častý požadavek nízké hmotnosti a malých rozměrů není třeba zajišťovat jen drahými materiály; např. polyetylenová láhev (PET) je díky vhodnému tvaru mnohem tužší než rovná deska nebo hladká trubice z téhož materiálu. Výlisky částí automobilových karosérií nebo letadel jsou z tenkého plechu, přitom jsou díky vhodnému tvaru (prolisy) velmi tuhé a přitom lehké.

### Historické poznámky

V historických dobách určovali stavitelé strojů rozměry součástí podle zkušeností předchozích generací; ještě na konci 19. a v prvních desetiletích 20. století, kdy už se prováděly základní pevnostní výpočty, byly strojní části bohatě předdimenzovávány, proto také dodnes jezdí staré parní lokomotivy – ovšem pouze jako historická atrakce. V této době také vývoj materiálů předběhl návrhové metody, proto třeba první letecké motory „prominuly“ svým konstruktérům např. nedokonalou znalost vlivu tvaru na pevnost součástí.

Pravděpodobně prvním, kdo systematicky zkoumal pevnost materiálů, byl **Galileo Galilei** (1564-1642). Upozornil mimo jiné i na zmíněný vliv tvaru na únosnost součástí (dutá stébla, kosti apod.). Teorii ohýbaných součástí (nosníků) se hluboce zabýval **Jakob Bernoulli** (1655-1705), příslušník švýcarské rodiny matematiků a fyziků (v hydromechanice poznáme jeho synovce Daniella B.). Záslouhou všestranného **Leonharda Eulera** (1707-1783) se teorie pružnosti a pevnosti dočkala významného pokroku; průhyb nosníku byl pro něho měřítkem pružnosti, zabýval se vzpěrem (namáhání štíhlých prutů tlakem, kdy hrozí vybočení z přímého směru) aj. **Charles Augustin de Coulomb** (1736-1806) publikoval první soubornou práci o pevnosti, jako

první řešil např. problém kroucení. Za zakladatele teorie pružnosti je pokládán francouzský inženýr **Claude Louis Marie Henri Navier** (1785-1836). Navier sestavil obecné rovnice pružnosti, rozvinul teorii ohybu a vyslovil první nepřesné závěry o obecné teorii kroucení. Správnou teorii kroucení odvodil Navierův žák **Adhémár Jean Claude Barré de Saint-Venant** (1797-1886).

## **Mechanické vlastnosti materiálů<sup>1</sup>**

---

**Mezi mechanické vlastnosti patří: pevnost, pružnost, houževnatost, tvrdost, tvárnost.**

---

### **Pevnost<sup>2</sup>**

Pevnost je schopnost materiálu odolávat porušení celistvosti. Později se ji naučíme vyjádřit i kvantitativně.

### **Pružnost**

Pružnost je schopnost materiálu vrátit se po odlehčení do původního stavu. Přetvoření materiálu může být buď **elastické** (pružné), kdy se materiál vrátí zcela do původního stavu, nebo **plastické** (trvalé), kdy tento návrat nenastane. Při překročení určité mezní hodnoty (mez pružnosti) se původně pružný materiál deformuje plasticky.

### **Houževnatost**

Vlastnost, jejímž měřítkem je energie (práce) potřebná k porušení celistvosti (nezaměňovat s pevností). Úder, který představuje velkou energii, rozdělí snadno křehký materiál, zatímco houževnatý pouze zdeformuje, ať už elasticky (pružina) nebo plasticky. Houževnatost závisí na teplotě (při nízké teplotě některé materiály křehnou) a při volbě materiálu je proto nutno mít na zřeteli i provozní podmínky<sup>3</sup>.

### **Tvrdost**

Tvrdost vyjadřujeme jako odpor proti vnikání cizího tělesa do povrchu materiálu. Lze ji ovlivnit nejen materiálem samotným, ale také např. tepelným a chemickotepelným zpracováním.

### **Tvárnost**

Tvárnost je schopnost materiálu měnit v tuhém stavu bez porušení soudržnosti vzájemnou polohu částic. Je typická pro většinu kovů.



### **Úkoly a otázka:**

1. Zařaďte pružnost a pevnost do systému technické mechaniky.
2. Vysvětlete pojem dimenzování součástí.
3. Vyjmenujte a charakterizujte mechanické vlastnosti materiálů.
4. Jaký je rozdíl mezi pružnou a plastickou deformací?

---

<sup>1</sup> Vedle mechanických vlastností určujeme ještě vlastnosti fyzikální, chemické a technologické.

<sup>2</sup> Mechanické vlastnosti jsou zde popisovány tak, abychom se vyhnuli pojmům, jejichž přesný obsah žáci dosud neznají.

<sup>3</sup> Výrazně se projevuje třeba u letadel; dopravní letadlo startuje např. v tropickém vedru a v letové hladině (10 – 12 km) je teplota několik desítek stupňů Celsia pod nulou.

## 2. VNĚJŠÍ A VNITŘNÍ SÍLY, NAPĚTÍ

Obsah této kapitoly:

- Vnější a vnitřní síly
- Normálové a tečné napětí
- Dovolené napětí, pevnostní rovnice

### Vnější a vnitřní síly

Vnější zatížení může být realizováno např. silami povrchovými, které mohou působit buď v ploše velmi malé vzhledem k rozměrům součásti (osamělé síly), nebo jsou spojitě rozložené (spojité zatížení), kromě toho se může jednat o objemové zatížení (tíhové síly). Vnější zatížení může být klidné – statické, nebo dynamické, může být místně stálé, nebo může měnit svoji polohu.

---

#### Vnější zatížení vyšetřujeme pomocí metody uvolňování a podmínek rovnováhy.

---

Vnější zatížení vyvolá v součásti odpor způsobený soudržností materiálu. Pod vlivem vnějšího zatížení se součást deformuje pružně nebo trvale, při překročení určité mezní hodnoty se součást poruší. Při běžném provozním namáhání jsou vnitřní síly<sup>1</sup> v rovnováze se silami vnějšími.

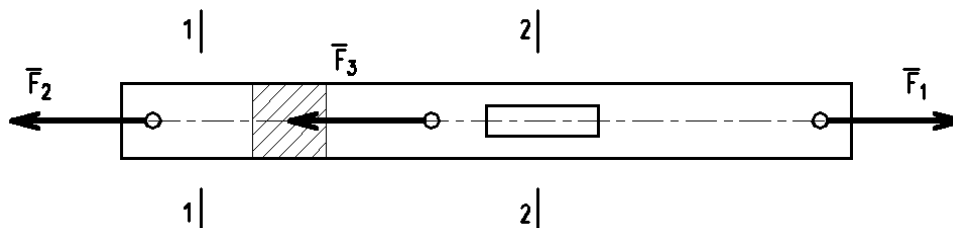
---

**Vnitřní síly určujeme Eulerovou metodou myšleného řezu. Jedná se vlastně o „metodu uvolňování aplikovanou na homogenní součást“. Součást přeručíme myšleným řezem v místě, kde chceme vyšetřovat vnitřní síly, a pro vnější a vnitřní síly píšeme podmínku rovnováhy.**

---

#### **Příklad:**

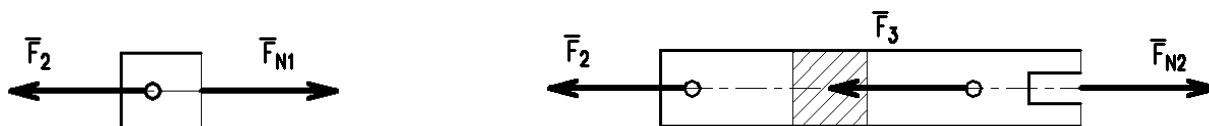
Určete vnitřní síly v označených průřezech tyče čtvercového průřezu zeslabené v určitém místě vyfrézovaným otvorem.



Obr. 2

#### **Řešení:**

V obou označených průřezech vedeme postupně myšlené řezy:



Obr. 3

Obr. 4

Účinky oddělené části nahradíme vnitřní silou a pro vzniklou soustavu píšeme podmínky rovnováhy:

---

<sup>1</sup> Pro jednoduchost píšeme o vnějších a vnitřních silách, ale zatížení může být samozřejmě vyjádřeno i momentem.

Průřez 1:

$$\sum F_{ix} = 0: F_2 - F_{N1} = 0,$$

$$F_{N1} = F_2.$$

Průřez 2:

$$\sum F_{ix} = 0: F_2 + F_3 - F_{N2} = 0,$$

$$F_{N2} = F_2 + F_3.$$

### 🔊) Normálové a tečné napětí

Na základě předchozího příkladu můžeme snadno dojít k závěru, že určení síly nebude stačit pro posouzení únosnosti součásti: průřez 2 je zeslaben otvorem, ale vnitřní síla by byla stejně velká i v případě, že by v součásti otvor nebyl.

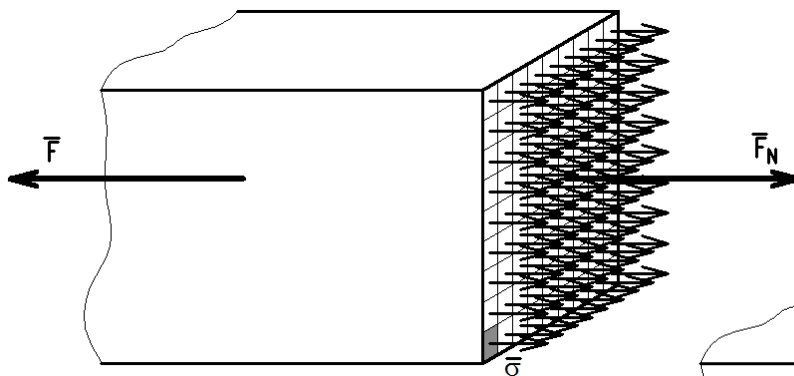
Namáhání součásti proto poměříme silou připadající na jeden čtvereční milimetr průřezu. V zeslabeném průřezu 2 naší součásti tedy na jeden mm<sup>2</sup> připadá větší síla, než by vznikla v průřezu bez zeslabení otvorem. Tuto sílu na 1 mm<sup>2</sup> nazýváme napětím.

---

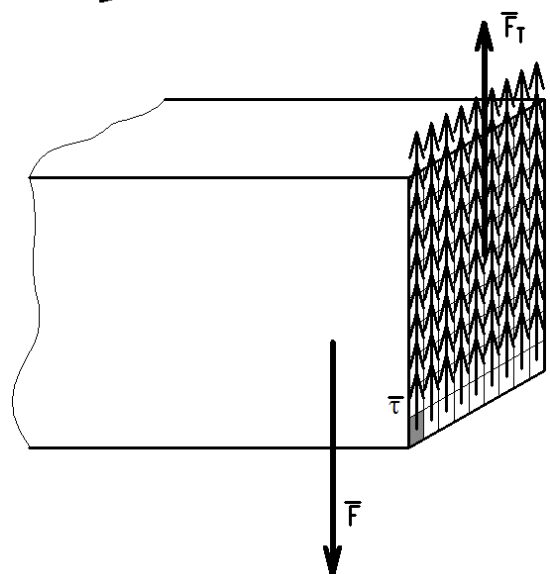
**Napětí (intenzita vnitřních sil) je rovno velikosti vnitřních sil připadajících na jednotku průřezu. Základní jednotkou je Pa (pascal), rozměrově 1 N.m<sup>-2</sup>, ale u strojírenských materiálů pracujeme spíše s MPa (megapaskaly). 1 MPa = 1N.mm<sup>-2</sup>. Napětí rozdělujeme na normálové  $\sigma$  (sigma) a tečné  $\tau$  (tau).**

---

Normálové napětí je způsobeno normálovými silami (síly tahové, tlakové), tečné napětí silami tečnými (také smykové nebo posouvající síly). Vektor normálového napětí směřuje z průřezu nebo do průřezu, napětí tečné leží v rovině průřezu.



Obr. 5



Obr. 6

### 🔊) Dovolené napětí, pevnostní rovnice

Největší napětí, které je součást schopna snést, nazýváme dovolené napětí.

---

**Dovolené napětí je určeno především druhem materiálu součásti a způsobem zatížení. Určujeme je ze znalosti mezních stavů materiálu (tedy zatížení, kdy se podstatně mění chování materiálu, konečným mezním stavem je mez pevnosti materiálu). Při základních předběžných výpočtech můžeme dovolené napětí vyhledat podle druhu zatížení a materiálu ve strojnických tabulkách.**

---

**Rovnici, která říká, že skutečné napětí může být nejvýše rovno dovolenému napětí, nazýváme pevnostní rovnicí:**

$$\begin{aligned}\sigma &\leq \sigma_D, \\ \tau &\leq \tau_D.\end{aligned}$$

---

Je-li napětí v průřezu rozloženo teoreticky rovnoměrně (tah, tlak, smyk – viz dále), počítáme jej z definičního vztahu jako poměr vnitřní síly v daném průřezu ku velikosti obsahu plochy průřezu<sup>1</sup>:

$$\sigma, \tau = \frac{F}{S} \left( \text{MPa} = \frac{\text{N}}{\text{mm}^2} \right)^2.$$



*Z pevnostní rovnice můžeme navrhovat průřezové rozměry, můžeme provádět kontrolu zatížení nebo můžeme určovat největší zatížení, které součást smí přenášet. Nejdříve ovšem musíme umět vyjádřit skutečné napětí.*



**Otázky a úkol:**

1. Jaký je vztah mezi vnějšími a vnitřními silami?
2. Jaký je princip metody myšleného řezu?
3. Co je to napětí a jaký má tato veličina význam?
4. Jaký směr mají normálové a tečné napětí na průřezu?
5. Čím je určeno dovolené napětí a jak vypadá pevnostní rovnice?

---

<sup>1</sup> Ve skutečnosti se na rozložení napětí projevuje vliv tvaru součásti a v místech tvarových změn dochází ke koncentraci napětí, a tím ke zvětšení místního napětí.

<sup>2</sup>Napětí obvykle dosazujeme v MPa, je třeba dávat pozor na délkové jednotky - mm.



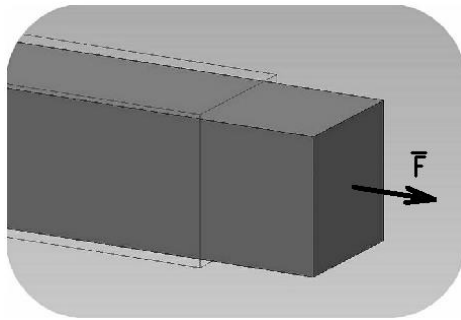
### 3. ZÁKLADNÍ DRUHY NAMÁHÁNÍ

Obsah této kapitoly:

- Deformační účinky zatěžujících sil na těleso
- Schéma – výpočtový model součásti a zatížení
- Průřezy a osa prutu

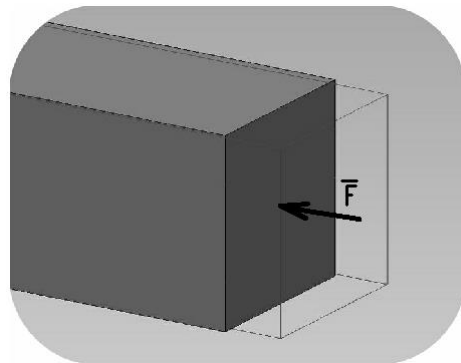
#### Deformační účinky zatěžujících sil na těleso

Zatížení může těleso:



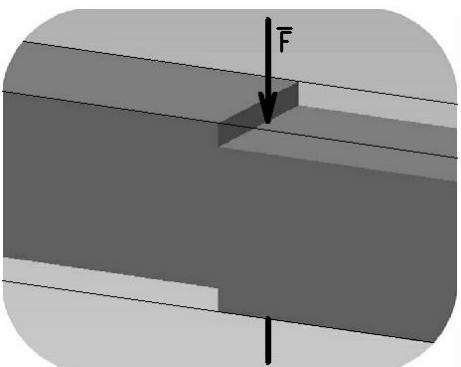
- **natahovat (namáhání tahem)**: těleso se prodlužuje a zužuje, jednotlivé průřezy tělesa se oddalují, vzniká normálové napětí, porušení soudržnosti se projeví přetržením,

Obr. 7



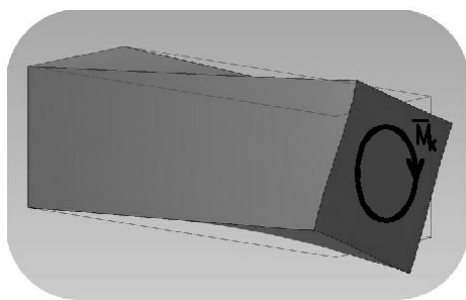
- **stlačovat (namáhání tlakem)**: těleso se zkracuje a rozšiřuje, jednotlivé průřezy tělesa se přibližují, vzniká normálové napětí, porušení soudržnosti se projeví pouze u křehkého materiálu rozdrčením (tvárný materiál se může stlačovat teoreticky bez omezení, na okraji se objeví nanejvýš trhliny); zvláštními případy tlaku jsou namáhání na otlacení (měrný tlak ve stykových plochách) a vzpěr (ztráta stability tvaru, kdy štíhlá součást vybočí z přímého směru a ohne se),

Obr. 8



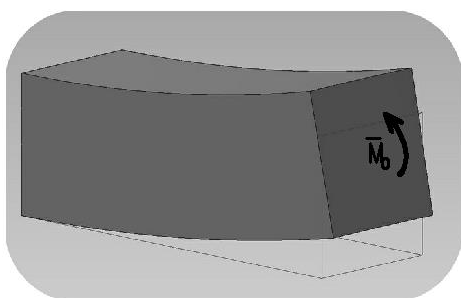
- **stříhat (namáhat smykem nebo stříhem)**: jednotlivé části tělesa se ve střížném průřezu vzájemně posouvají, vzniká tečné napětí, porušení soudržnosti se projeví usmyknutím (přestřížením); čistý smyk podle obrázku je teoretickým případem namáhání, ve skutečnosti síly nepůsobí zcela v jedné přímce a součást se deformuje zkosem,

Obr. 9



- **zkrucovat (namáhání krutem):** těleso se zkrucuje, jednotlivé průřezy tělesa se vůči sobě pootáčejí, vzniká tečné napětí, porušení soudržnosti se projeví ukroucením; vzájemné natočení průřezů kolem osy lze vyjádřit zkosem jako při smyku,

Obr. 10



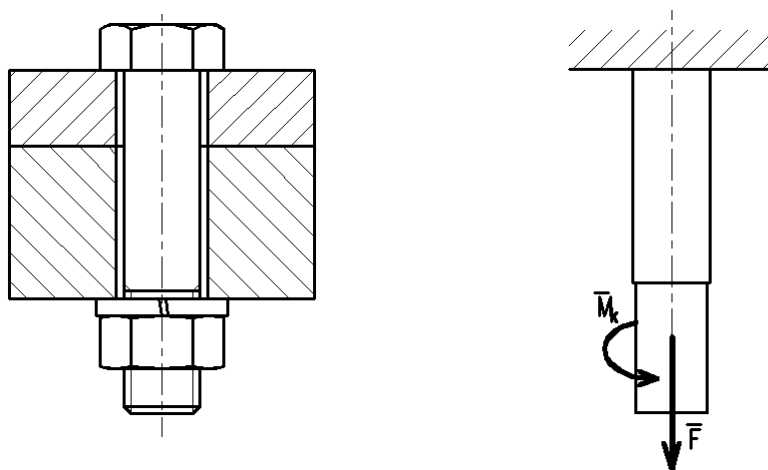
- **ohýbat (namáhání ohybem):** těleso se prohne, jednotlivé průřezy se vůči sobě nakloní, tj. na jedné straně se oddalují, na druhé straně přibližují, vzniká normálové napětí, porušení soudržnosti se projeví zlomením; tělesa namáhaná na ohyb nazýváme obecně nosníky, i když se jedná o konkrétní strojní součásti.

Obr. 11

### 🔊 Schéma – výpočtový model součásti a zatížení

Pro výpočty v pružnosti a pevnosti zavádíme tzv. výpočtový model, který představuje určité zjednodušení proti skutečnosti. Jeho vytvoření vyžaduje zkušenosti, protože každé takové zjednodušení představuje zhoršení přesnosti výsledků vzhledem ke skutečnosti. Jiný výpočtový model sestavujeme pro grafické nebo analytické (tedy početní – „tužka a papír“) řešení, jiný pro numerické řešení s využitím možností výpočetní techniky (tzv. metoda konečných prvků)<sup>1</sup>.

Šroubový spoj a výpočtový model šroubu namáhaného tahem a krutem (při utahování):



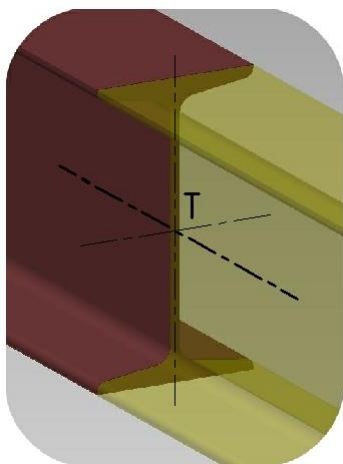
Obr. 12

<sup>1</sup> Ať už řešíme problém pomocí počítače či bez něho, základem je správné určení vazeb a zatížení, tedy aplikace metody uvolňování. To za nás žádný počítač neudělá.

## Průřezy a osa prutu

Součást je nejvíce namáhána v místě, kterému říkáme **nebezpečný průřez**. Je to místo, v němž by se projevil největší účinek síly na těleso. Určit správně nebezpečný průřez vyžaduje určitý cvik.

U každého průřezu součásti je důležitým bodem jeho těžiště. Kolmici procházející těžištěm průřezu budeme nazývat **osou průřezu** (na obrázku vyznačena tlustou čarou).



Určení polohy zatížení vzhledem k ose průřezu je jednou důležitou základní úlohou pro budoucí stanovení druhu namáhání. Podle polohy síly vzhledem k ose průřezu (nebo k ose prutu – viz dále) také poznáme, zda je součást namáhána pouze základním druhem namáhání, nebo zda se jedná o namáhání kombinované.

Zatěžující síla může být s osou průřezu totožná, rovnoběžná, může k ní být kolmá, obecně různoběžná nebo mimoběžná. Sílová dvojice může také zaujímat různou polohu vzhledem k ose průřezu (osa dvojice totožná s osou průřezu, nebo kolmá k ose průřezu).

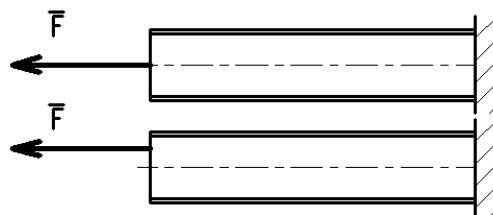
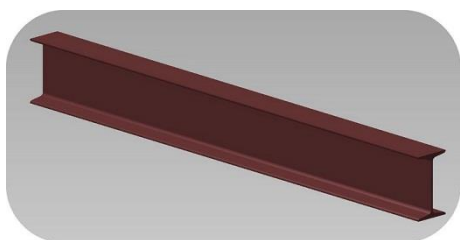
Obr. 13

---

**U součásti typu prut (tj. obecně součást, která má jeden rozměr výrazně větší než zbývající dva rozměry) určujeme polohu zatížení také vzhledem k ose prutu. Osou prutu nazýváme spojnicí těžišť jednotlivých příčných průřezů prutu<sup>1</sup>.**

---

Význam polohy zatížení vzhledem k ose prutu ukážeme na jednoduché součásti – prutu stálého průřezu:



Obr. 14

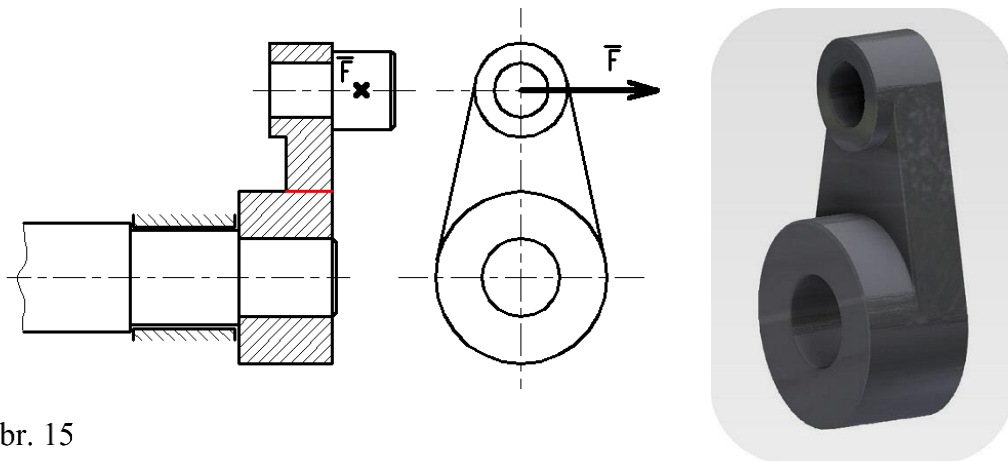
V prvním případě je součást namáhána osovou tahovou silou, jedná se tedy o namáhání tahem. Ve druhém případě působí tahová síla rovnoběžně s osou, k tahu se tedy přidružuje ještě ohyb. Toto namáhání nazýváme mimostředný (excentrický) tah a patří mezi kombinovaná namáhání.

### **Příklad:**

Nakreslete osu vyznačeného průřezu a určete polohu zatěžující síly vzhledem k této ose.

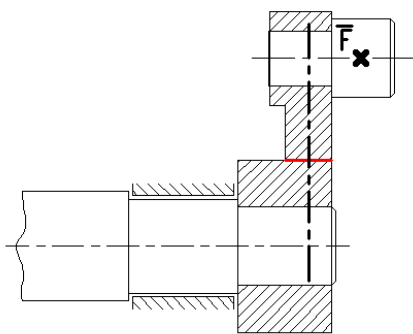
---

<sup>1</sup> Osa může být přímá nebo zakřivená.



Obr. 15

**Řešení:**



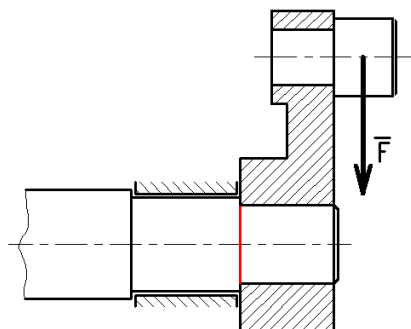
V těžišti průřezu sestrojíme kolmici. Síla je vzhledem k ose průřezu mimoběžná. V průřezu vznikne kombinace napětí v krutu a v ohybu.

Obr. 16



**Úkoly a otázka:**

1. Vymenujte základní druhy namáhání a uveďte, jak se projevují na součásti.
2. Co je to osa průřezu a prutu?
3. Nakreslete osu vyznačeného průřezu hřídele a určete polohu zatěžující síly vzhledem k této ose. Odhadněte druh namáhání.



Obr. 17

## 4. ZKOUŠKA PROSTÝM TAHEM

Obsah této kapitoly:

- Účel a význam zkoušky
- Zkušební vzorek pro zkoušku oceli, trhací stroj
- Průběh zkoušky, tahový diagram a důležité mezní stavy; dovolené napětí

### 🔊) Účel a význam zkoušky

Zkouška tahem patří mezi statické zkoušky, kdy se zatěžující síla mění pomalu, a to až do porušení (přetržení). Zkouška tahem je jednou ze základních a nejdůležitějších zkoušek vůbec. Je předepsána normou ČSN 42 0310.

---

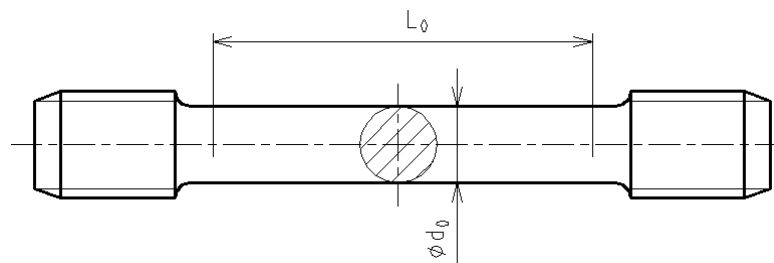
**Pomocí této zkoušky provádíme analýzu základních mezních stavů materiálu, tedy stavů, kdy se podstatně mění chování materiálu vzhledem k zatížení. Z výsledků této zkoušky lze s vysokou přesností určit i chování materiálu při jiných druzích namáhání, proto se jiné statické zkoušky (smyk, krut, ohyb) provádějí jen výjimečně a mají charakter spíše zkoušek technologických.**

---

Zkouška tahem se provádí na zkušebních tyčích, kdy se zaznamenává zatěžovací síla a odpovídající deformace (prodloužení).

### 🔊) Zkušební vzorek pro zkoušku oceli, trhací stroj

Tvar a rozměry zkušebního vzorku se liší podle druhu materiálu, případně polotovaru (plechy), který se zkouší. Pro ocel je předepsána kruhová tyč o průměru  $d_0$  nejčastěji 10 mm a doporučené měřené délce  $l_0 = 5 \cdot d_0$ . Zkušební tyč má válcové nebo závitové hlavy pro upnutí do čelistí trhacího stroje.



Obr. 18

Zkouška se provádí na trhacím stroji.



Obr. 19

Univerzální trhací stroj má mechanický nebo hydraulický pohon (na obrázku je hydraulický stroj) a kromě statické zkoušky tahem je na něm možno provádět např. zkoušku tlakem, ohybem, zkoušky tečení (za vyšších teplot) a zkoušky dynamické (pomocí pulsátoru).

Záznamové zařízení (vpravo) ukazuje dosaženou sílu a vykresluje diagram závislosti zatížení a prodloužení.

## Průběh zkoušky, tahový diagram a důležité mezní stavy; dovolené napětí

### 1. Odběr vzorku

Vzorek musí reprezentovat průměrnou kvalitu celého množství zkoušeného materiálu a jeho odběrem se nesmí ovlivnit zkoušené vlastnosti (např. vysokou teplotou apod.). Při tahové zkoušce je třeba vyzkoušet nejméně 2 zkušební tyče.

### 2. Proměření a orýsování vzorku

Měřená délka (zpravidla 50 mm) se rozdělí na 10 dílků, aby bylo možno po zkoušce určit prodloužení jednotlivých dílků (deformace – přetvoření vzorku může být výrazně větší v určitém místě měřené délky nebo se může rozložit rovnoměrněji).

### 3. Upnutí tyče a zatěžování

Tyč se upne do čelistí trhačích stroje a plynule zatěžuje silou, která vzrůstá předepsanou rychlostí, až do přetržení.

### 4. Proměření tyče a vyhodnocení zkoušky (uvedeno pouze základní proměření)

$L_0$  – původní měřená délka,

$L_u$  – měřená délka po zkoušce,

$d_0$  – původní průměr tyče,

$d_u$  – průměr po zkoušce,

#### Důležité hodnoty deformace

Prosté prodloužení (posunutí):

$$\Delta L = L_u - L_0 \text{ (mm).}$$

Poměrné prodloužení (dédkové přetvoření<sup>1</sup>):

$$\varepsilon = \frac{L_u - L_0}{L_0} \left( \frac{\text{mm}}{\text{mm}} = 1 \right).$$



*Poměrné prodloužení je prodloužení každého milimetru součásti. Umožňuje porovnávat deformaci nesouměřitelných součástí (lano důlního výtahu délky 400 m se může prodloužit o několik desítek mm, aniž by bylo v ohrožení, zatímco u táhla délky 200 mm je podobné prosté podloužení nemyslitelné; poměrná prodloužení lze však snadno porovnat).*

#### Vyhodnocení lomu

Podle vzhledu lomu usuzujeme na houževnaté či křehké chování materiálu.

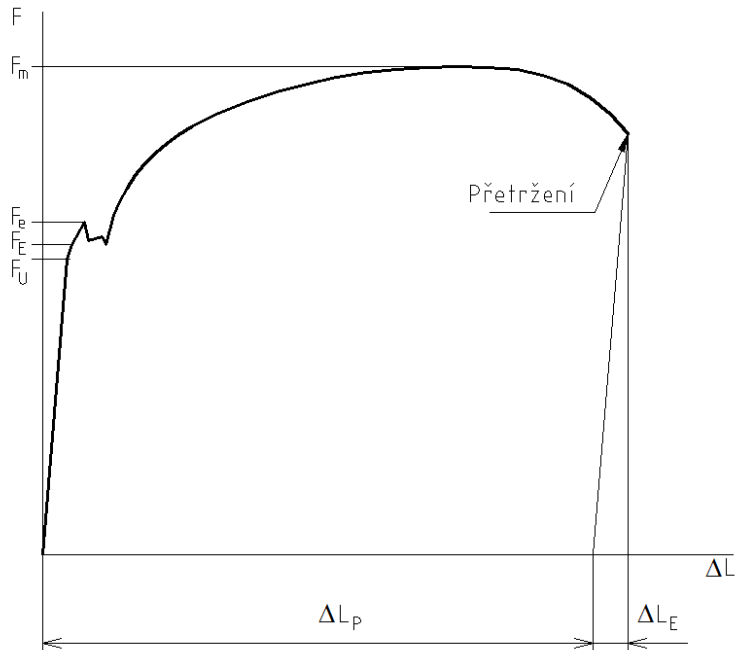
Na obr. a je **dutinový lom** s výraznou plastickou deformací (tvárný materiál), na obr. b je **křehký lom**.



Obr. 20 a, b

<sup>1</sup> U deformace je nutno rozlišit posunutí a přetvoření. Největší posunutí může být u součásti v místě, kde je téměř nulové přetvoření a naopak.

## Tahový diagram vzorku z uhlíkové oceli



Obr. 21

$F_U$  – síla na mezi úměrnosti

(zatížení je přímo úměrné prodloužení – Hookův zákon),

$F_E$  – síla na mezi elasticity (určuje se speciální zkouškou pomocí průtahoměru),

$F_e$  – síla na mezi kluzu (materiál se výrazně plasticky deformuje, aniž vzrůstá zatížení, následuje zpevnění, konkrétní průběh zatížení na mezi kluzu je velmi různý),

$F_m$  – síla na mezi pevnosti,

$\Delta L_P$  – výsledný podíl plastické deformace (mm),

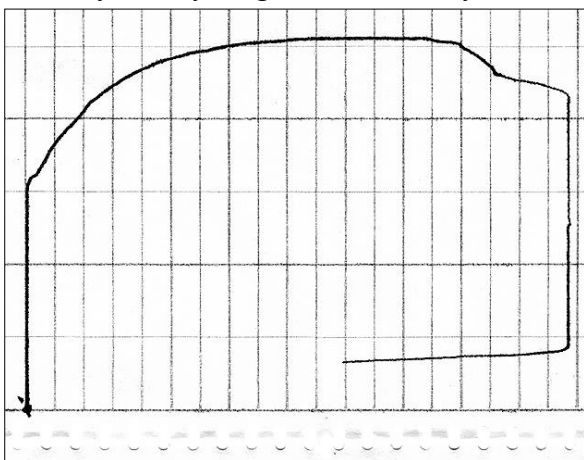
$\Delta L_E$  – výsledný podíl elastické deformace (mm).



*Jak bude uvedeno později, lze diagram vynášet také v souřadnicích napětí – poměrné prodloužení ( $\sigma - \varepsilon$ ), takže síle na mezi kluzu odpovídá napětí na mezi kluzu  $R_e$  a síle na mezi pevnosti odpovídá napětí na mezi pevnosti  $R_m$  (zkráceně mez kluzu a mez pevnosti).*

**Diagram v souřadnicích  $F - \Delta L$  se nazývá tahový diagram součásti, diagram  $\sigma - \varepsilon$  je diagramem materiálu.**

Skutečný tahový diagram vzorku s výraznou mezi kluzu .

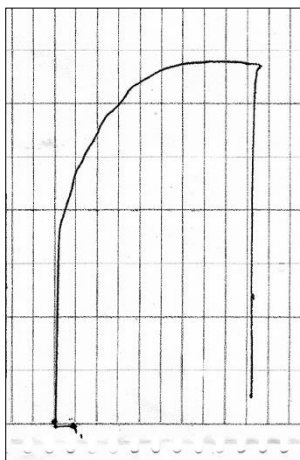


Obr. 22

Obr. 23



Tahový diagram s nevýraznou mezí kluzu (určujeme tzv. smluvní mez kluzu), menší celkovou deformací a vyšší pevností. Materiál se chováním blíží křehkému materiálu.



Obr. 24

Obr. 25



*Plocha diagramu je úměrná práci potřebné k přetržení vzorku – tedy vypovídá o houževnatosti. Houževnatý, tvárný materiál má plochu velkou, křehký naopak malou (proto např. šedá litina při rázu praská – nepojme velkou energii).*

### Určení dovoleného napětí v tahu při klidném (statickém) zatížení

**Dovolené napětí vztahujeme u houževnatých materiálů k mezi kluzu, u křehkých k mezi pevnosti:**

$$\sigma_{Dt} = \frac{R_e}{k}, \quad \sigma_{Dt} = \frac{R_m}{k},$$

**kde  $k$  je součinitel bezpečnosti. Závisí na druhu a tvaru součásti a druhu zařízení, pro něž je určena, a na časovém průběhu namáhání (statické, dynamické).**



*Mez kluzu u uhlíkových ocelí tř. 11 je přibližně  $(0,55 - 0,65) R_m$ , u slitinových  $(0,75 - 0,8) R_m$ .*

### Určení dovoleného napětí při mívivém a střídavém zatížení

Jedná se o základní druhy dynamického namáhání. Mívivé zatížení se mění od 0 do maxima („zatížení-odlehčení“), střídavé zatížení se mění od +maxima do –maxima (střídavý tah-tlak, střídavý ohyb rotujícího hřídele atd.). Dovolené napětí při mívivém zatížení označujeme indexem II (při zatížení statickém můžeme použít index I), dovolené napětí při střídavém zatížení pak indexem III.

**Dovolená napětí při mívivém a střídavém zatížení počítáme vynásobením dovoleného napětí při statickém namáhání součiniteli  $c_{II}$  nebo  $c_{III}$ .**

Přibližné hodnoty součinitelů  $c_{II}$  a  $c_{III}$  pro typické materiály:



Materiál	$c_{II}$	$c_{III}$
Uhlíková ocel 11 340 – 11 500	0,85	0,65
Uhlíková ocel 11 600 – 11 700	0,75	0,60
Šedá litina a ocel na odlitky	0,75	0,50
Legované oceli	0,70	0,45
Lehké kovy a jejich slitiny	0,65	0,50
Zinek, mosazi a bronzы	0,60	0,35



*Tento postup je vhodný pouze pro předběžný výpočet, jinak přesný výpočet při dynamickém namáhání je podstatně složitější.*



**Otázky:**

1. Jak se chová ocelový vzorek na mezi kluzu?
2. Jaký je rozdíl mezi prostým a poměrným prodloužením?
3. Které veličiny vynášíme na osy diagramu součásti a diagramu materiálu?
4. O čem vypovídá plocha tahového diagramu?
5. Jak se liší tahový diagram houževnatého a křehkého materiálu?
6. Jak se určí dovolené napětí z výsledků tahové zkoušky?
7. Vyhledejte ve strojnických tabulkách hodnoty meze kluzu a pevnosti vybraných konstrukčních materiálů.

## 5. PRUŽNÁ DEFORMACE V TAHU A HOOKŮV ZÁKON

Obsah této kapitoly:

→ Hookův zákon a Poissonovo číslo

### Hookův zákon a Poissonovo číslo

Prosté prodloužení tyče je dáno vztahem

$$\Delta L = L_u - L_0 \text{ (mm)}.$$

Poměrné prodloužení neboli délkové přetvoření je pak

$$\varepsilon = \frac{L_u - L_0}{L_0} \left( \frac{\text{mm}}{\text{mm}} = 1 \right).$$

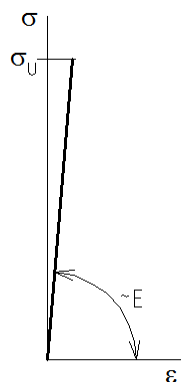
(Viz předchozí kapitola).

Poměrné prodloužení při přetržení se nazývá tažnost materiálu a obvykle se vyjadřuje v procentech:

$$A = \frac{L_u - L_0}{L_0} \cdot 100 \text{ \%}.$$

Od počátku zatěžování do meze úměrnosti je vztah mezi napětím a poměrným prodloužením dán **Hookovým zákonem**<sup>1</sup>

$$\sigma = E \cdot \varepsilon,$$



kde konstanta úměrnosti (v rovnici přímky  $y = k \cdot x$ )  $E$  se nazývá **modul pružnosti v tahu** (také Youngův modul<sup>2</sup>). Je mírou tuhosti materiálu a má stejné jednotky jako napětí (MPa). Jeho hodnota pro ocel je přibližně  $(2 - 2,15) \cdot 10^5$  MPa. Modul pružnosti je úměrný sklonu přímky (je číselně roven tangentě směrového úhlu – směrnici přímky).

Dosazením  $\sigma = F/S$  a  $\varepsilon = \Delta L/L_0$  do Hookova zákona a úpravou rovnice obdržíme vztah pro prosté prodloužení tyče

$$\Delta L = \frac{FL_0}{ES}.$$

Obr. 26

Z pokusů vyplývá, že v natahované součásti vzniká vedle délkové deformace ve směru osy také délková změna ve dvou příčných směrech (zúžení = kontrakce). Tyto změny jsou v mezích platnosti Hookova zákona ve vzájemném poměru

$$\mu = \frac{\text{poměrné zúžení v příčném směru}}{\text{poměrné prodloužení v podélném směru}}.$$

<sup>1</sup> Robert Hooke (1635-1703), anglický všestranný učenec – fyzik, biolog, astronom, architekt, současník I. Newtona.

<sup>2</sup> Thomas Young (1776-1829), anglický vědec, především lékař, ale také fyzik a díky mimořádnému jazykovému nadání i jazykovědec a egyptolog.

Tento poměr  $\mu$  se nazývá **Poissonovo číslo**<sup>1</sup> a je přibližně 0,3 pro většinu konstrukčních materiálů. Korek má hodnotu 0, pryž 0,5.

U smyku se setkáme ještě s modulem pružnosti ve smyku  $G$ .

---

**Pro homogenní, izotropní materiál (izotropní materiál má ve všech směrech stejné mechanické vlastnosti) jsou tyto tři základní materiálové konstanty pružnosti ve vztahu**

$$E = 2G(1 + \mu).$$

---



**Úkoly:**

1. Určete dovolená napětí:
  - a. Pro ocel 11 600, míra bezpečnosti  $k = 1,6$ , statické zatížení.
  - b. Pro ocel 11 343, míra bezpečnosti  $k = 1,5$ , míjivé zatížení.
  - c. Pro ocel 12 060, míra bezpečnosti  $k = 1,5$ , střídavé zatížení.
2. Porovnejte délkové přetvoření (poměrné prodloužení) u součástí:
  - a. Lano délky  $L_{01} = 400$  m,  $\Delta L_1 = 300$  mm.
  - b. Šroub délky  $L_{02} = 80$  mm,  $\Delta L_2 = 0,045$  mm.

---

<sup>1</sup> Simeon Denis Poisson (1781-1840), francouzský matematik, astronom a fyzik.

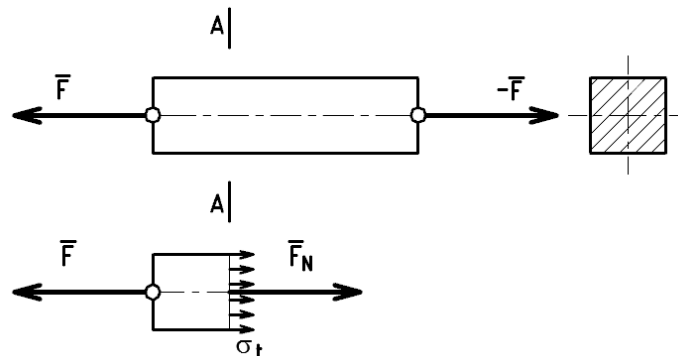
## 6. NAMÁHÁNÍ TAHEM

Obsah této kapitoly:

- Napětí v průřezu a pevnostní rovnice, použití pevnostní rovnice
- Deformační podmínka

### Napětí v průřezu a pevnostní rovnice, použití pevnostní rovnice

Součást (prut) je v tomto případě zatížena osovou silou a v jejím průřezu vzniká tahové napětí. Jak bylo už dříve ukázáno, jeho velikost určíme řezovou metodou (kap. 2).



Obr. 27

Myšleným řezem rozdělíme součást v nebezpečném průřezu, na ponechanou část pak působí vnější síla  $F$  (která může být výslednicí více vnějších sil) a vnitřní síla  $F_N$ , která se rovná vnější síle  $F$  (nebo výslednici zmíněných vnějších sil), takže pro napětí platí

$$\sigma_t = \frac{F}{S},$$

kde  $S$  je plošný obsah průřezu. Napětí je v průřezu rozloženo teoreticky rovnoměrně.

---

**Pevnostní rovnice pro namáhání tahem je**

$$\sigma_t = \frac{F}{S} \leq \sigma_{Dt}.$$

**Tuto rovnici použijeme v kontrolním výpočtu, návrhovém výpočtu nebo ve výpočtu únosnosti. To platí pro všechny druhy namáhání.**

---

#### Kontrolní výpočet

Kontrolní výpočet provádíme tehdy, když známe rozměry průřezu, velikost zatížení a dovoleného napětí. Pak vypočítáme skutečné napětí a porovnáme jej s dovoleným. Pokud je nejvýše rovno napětí dovolenému, pak součást vyhovuje.

K výpočtu použijeme levou část pevnostní rovnice:

$$\sigma_t = \frac{F}{S}.$$

#### Návrhový výpočet

Návrhový výpočet provádíme tehdy, když známe velikost zatížení a chceme vypočítat velikost průřezu. Volíme materiál (tedy dovolené napětí) a vypočítáme nejmenší potřebný obsah průřezu (z něho pak průřezové rozměry).

K výpočtu použijeme pravou část pevnostní rovnice:

$$\frac{F}{S} \leq \sigma_{Dt}, \quad S_{min} = \frac{F}{\sigma_{Dt}}$$

Návrhový výpočet provádíme tehdy, jestliže se jedná o jednoduchou součást nebo o předběžný výpočet důležitého rozměru. V komplikovanějších případech spíše vypracujeme konstrukční návrh podle konstrukčních pravidel a zásad a provedeme výpočet kontrolní.

### Výpočet únosnosti

Pro výpočet únosnosti potřebujeme znát průřezové rozměry a dovolené napětí. Z těchto hodnot pak určíme největší přípustné zatížení.

K výpočtu použijeme pravou část pevnostní rovnice:

$$\frac{F}{S} \leq \sigma_{Dt}, \quad F_{max} = S \cdot \sigma_{Dt}$$

### Deformační podmínka

V předchozí kapitole bylo z Hookova zákona odvozeno prosté prodloužení součásti

$$\Delta L = \frac{FL_0}{ES}$$

V některých případech může být dáno přípustné (dovolené) prodloužení, které nelze překročit.

---

### Potom můžeme formulovat deformační podmínku

$$\Delta L = \frac{FL_0}{ES} \leq \Delta L_D,$$

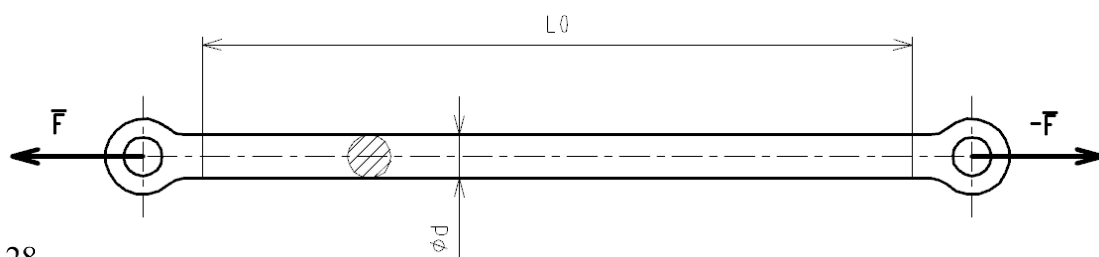
s níž pracujeme jako s pevnostní podmínkou. Můžeme ji použít k výpočtu kontrolnímu, návrhovému i únosnosti.

---

V praxi je řada případů, kdy (nejen u tahu) rozhoduje o dimenzování právě deformační podmínka.

#### Příklad:

Táhlo je částí mechanismu, který vyklápí železniční vozy. V blízkosti mechanismu se musí pohybovat dělníci a táhlo může v provozu korodovat. Táhlo přenáší osovou sílu  $F = 33$  kN. Navrhněte průměr táhla ze zvoleného materiálu, vypočtete prosté prodloužení a vypočtete, jak se zmenší průměr táhla při zatížení. Délka střední části  $L_0 = 800$  mm.



Obr. 28  
Řešení:

Jako materiál táhla zvolíme ocel 11 420 a míru bezpečnosti určíme s ohledem na nebezpečí úrazu  $k = 2$ . Při určování meze kluzu se přidržíme dolní hodnoty  $R_e = 0,55R_m = 0,5 \cdot 420 = 231$  MPa.

Dovolené napětí

$$\sigma_{Dt} = \frac{R_e}{k} = \frac{231 \text{ MPa}}{2} = 116 \text{ (MPa)}.$$

Vliv ok na koncích táhla (koncentrace napětí) předpokládáme zahrnutý ve vyšší bezpečnosti. Na deformaci nebudou mít oka podstatný vliv.

Návrhový výpočet:

$$\frac{F}{S} \leq \sigma_{Dt}, \quad S_{min} = \frac{F}{\sigma_{Dt}} = \frac{33 \cdot 10^3 \text{ N}}{116 \text{ MPa}} = 284,48 \text{ (mm}^2\text{)}.$$

Průměr táhla:

$$S = \frac{\pi \cdot d^2}{4}, \quad d = \sqrt{\frac{4S}{\pi}} = \sqrt{\frac{4 \cdot 284,48 \text{ mm}^2}{\pi}} = \underline{19,03 \text{ (mm)}}.$$

Volíme normalizovaný polotovár (kruhová tyč) o průměru 20 mm.

Výpočet prodloužení:

Řešíme prodloužení střední části o délce  $L_0$ :

$$\Delta L = \frac{FL_0}{ES} = \frac{33 \cdot 10^3 \text{ N} \cdot 800 \text{ mm}}{2,1 \cdot 10^5 \text{ MPa} \cdot 314,16 \text{ mm}^2} = \underline{0,4 \text{ (mm)}}.$$

Průřez táhla

$$S = \frac{\pi \cdot d^2}{4} = \frac{\pi \cdot 20^2 \text{ mm}^2}{4} = 314,16 \text{ (mm}^2\text{)}.$$

Výpočet zúženého průřezu:

Poměrné prodloužení

$$\varepsilon = \frac{\sigma}{E} = \frac{F}{SE} = \frac{33 \cdot 10^3 \text{ N}}{314,16 \text{ mm}^2 \cdot 2,1 \cdot 10^5 \text{ MPa}} = 5 \cdot 10^{-4}$$

Poměrné zúžení

$$\varepsilon_y = \varepsilon_z = \varepsilon_x \mu = 5 \cdot 10^{-4} \cdot 0,3 = 1,50 \cdot 10^{-4}.$$

Zúžený průměr a průřez:

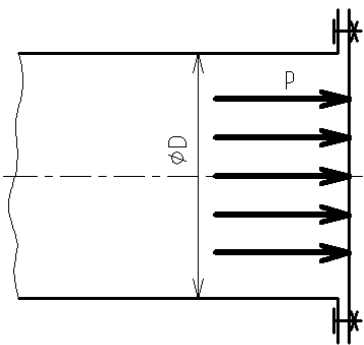
$$\varepsilon_y = \frac{d_0 - d_u}{d_0}, d_u = d_0 - d_0 \varepsilon_y = d_0 \cdot (1 - \varepsilon_y) = 20 \text{ mm} \cdot (1 - 1,5 \cdot 10^{-4}) =$$

$$= \underline{19,997 \text{ (mm)}}.$$

$$S_u = \frac{\pi \cdot d_u^2}{4} = \frac{\pi \cdot 19,997^2 \text{ mm}^2}{4} = \underline{314,07 \text{ (mm}^2\text{)}}.$$

**Příklad:**

V potrubí je tlaková voda s přetlakem  $p = 0,5 \text{ MPa}$ . Na potrubí je přišroubováno víko s osmi šrouby M 20. Průměr  $D = 200 \text{ mm}$ . Vypočítejte velikost tahového napětí v závitu šroubu.



**Řešení:**

Výpočet síly na víko:

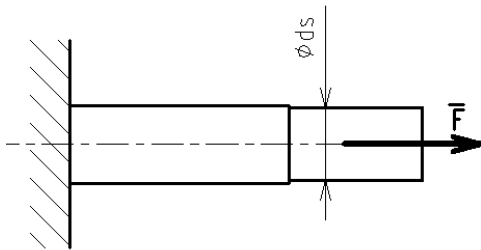
$$F = p \cdot S = 0,5 \text{ MPa} \cdot \frac{\pi \cdot 200^2 \text{ mm}^2}{4} = 15\,708 \text{ (N)}.$$

Síla na jeden šroub:

$$F_1 = \frac{F}{8} = \frac{15\,708 \text{ N}}{8} = 1\,964 \text{ (N)},$$

Obr. 29

Výpočtový model šroubu:



Obr. 30

Do vztahu pro tahové napětí dosadíme tzv. výpočtový průřez jádra šroubu<sup>1</sup>  $A_s$ , který odpovídá střednímu průměru

$$d_s = \frac{d_2 + d_3}{2}.$$

Pro šrouby M 20 je  $A_s = 220 \text{ mm}^2$ .

Napětí ve šroubu<sup>2</sup>:

$$\sigma_1 = \frac{F}{A_s} = \frac{1\,964 \text{ N}}{220 \text{ mm}^2} = \underline{8,93 \text{ (MPa)}}.$$

<sup>1</sup> V novějších vydáních strojnických tabulek tyto hodnoty nejsou uvedeny.

<sup>2</sup> Při utahování je šroub namáhán též krutem. U skutečného spoje by šrouby dále musely být utaženy s předpětím, aby byla zajištěna těsnost spoje i při působení provozního tlaku. Protože zatím neumíme tyto případy počítat, krut bychom při kontrolním výpočtu zohlednili sníženým dovoleným napětím a předpětí bychom odhadli podle podobných případů z praxe.

## 7. NAMÁHÁNÍ TLAKEM

Obsah této kapitoly:

- Napětí v průřezu a pevnostní rovnice
- Zkouška tlakem, dovolené napětí

### Napětí v průřezu a pevnostní rovnice

Na obrázku jsou sloupky silničního mostu, které nesou tlakovou sílu.

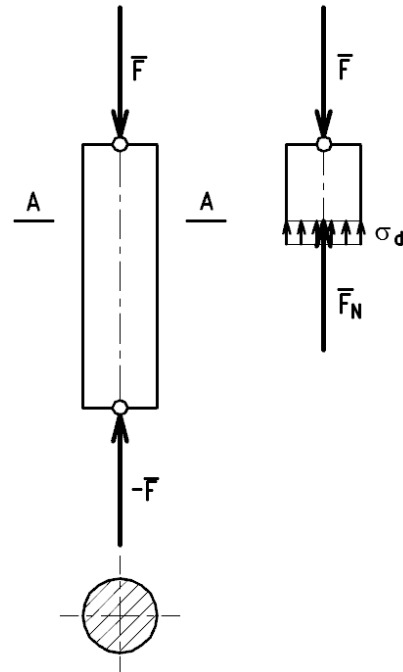


Obr. 31

Obr. 32

Aplikace řezové metody je stejná jako u namáhání tahem, vnitřní síla směřuje do průřezu. Napětí je opět rozloženo teoreticky rovnoměrně, označujeme jej  $\sigma_d$  a počítáme podle vztahu

$$\sigma_d = \frac{F}{S}$$



---

**Pevnostní rovnice pro namáhání tahem je**

$$\sigma_d = \frac{F}{S} \leq \sigma_{Dd}$$

**Tuto rovnici opět použijeme v kontrolním výpočtu, návrhovém výpočtu nebo ve výpočtu únosnosti.**

---

### Zkouška tlakem, dovolené napětí

U houževnatého materiálu (tažná ocel) má pracovní křivka materiálu až do meze kluzu podobný průběh jako při zkoušce tahem. Protože bezpečnost vztahujeme k mezi kluzu, počítáme dovolené napětí stejně jako u tahu. Po překročení meze kluzu narůstá deformace rychleji než do meze kluzu, ale pomaleji než u tahového namáhání. Tažná ocel se neustále deformuje, k porušení (trhliny, rozpadání) nastává při podstatně větším napětí než je mez pevnosti v tahu.

Dovolené napětí v tlaku je stejné jako dovolené napětí v tahu:

$$\sigma_{Dd} = \frac{R_e}{k} = \sigma_{Dt}$$

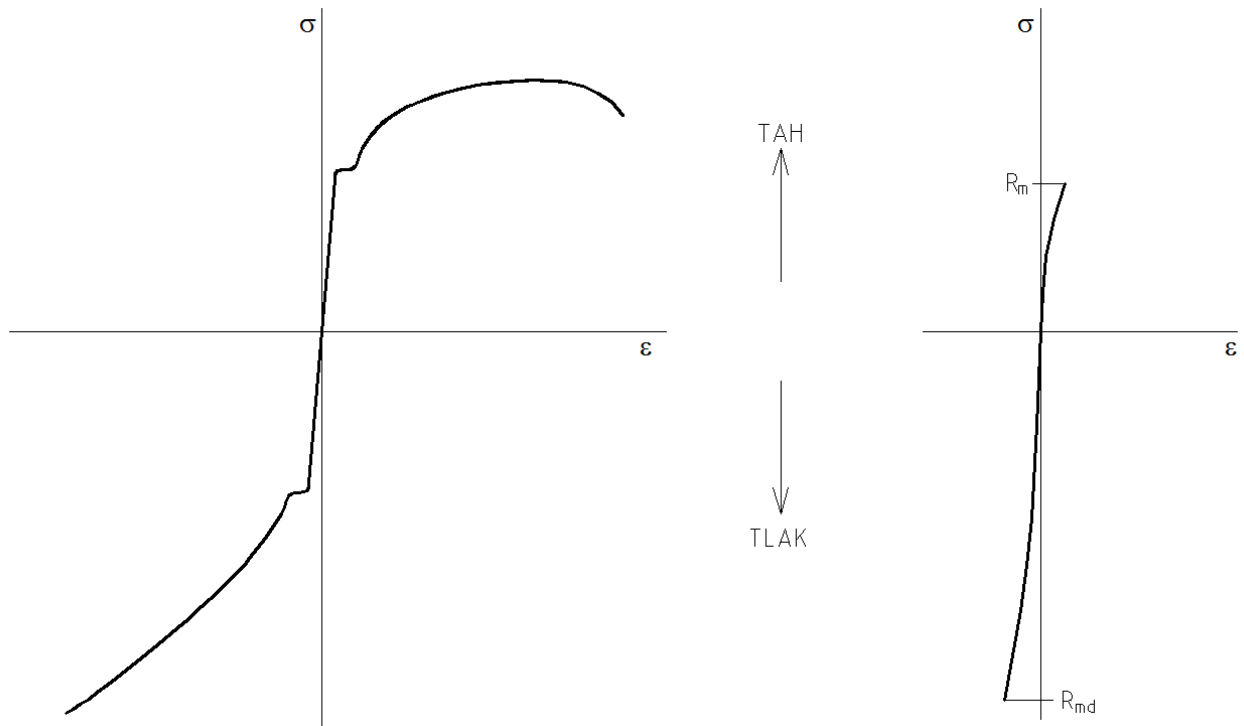


Pracovní diagram křehkého materiálu se podstatně odlišuje od materiálu houževnatého. Diagram nemá přímkovou část, výsledná deformace je malá a mez pevnosti v tlaku je podstatně větší než mez pevnosti v tahu.

Dovolené napětí v tlaku počítáme podobně jako u namáhání tahem z meze pevnosti:

$$\sigma_{Dd} = \frac{R_{md}}{k}$$

### Porovnání diagramů tažné oceli a šedé litiny



Obr. 33



*Průběh a tvar lomové plochy u křehkých materiálů závisí na jejich křehkosti, velmi křehký materiál (stavební hmoty apod.) praská podélně, ostatní materiály diagonálně nebo kónicky.*

Pro šedou litinu platí, že mez pevnosti v tlaku je přibližně třikrát větší než mez pevnosti v tahu. Míru bezpečnosti volíme o něco vyšší než u tahu.

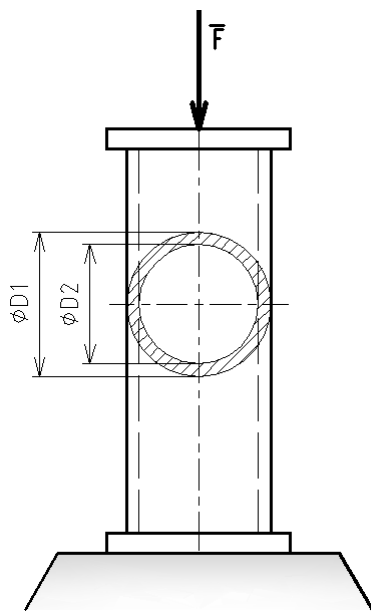
#### **Příklad:**

Dutý litinový sloup má vnější průměr  $D_1 = 368$  mm a tloušťku stěny  $t = 8$  mm. Je zatížen osovou silou o největší velikosti  $F = 500$  kN. Proveďte kontrolní výpočet sloupu, je-li dovolené napětí  $\sigma_{Dd} = 60$  MPa.

Průřez sloupu

$$S = \frac{\pi}{4} \cdot (D_1^2 - D_2^2) = \frac{\pi}{4} \cdot (368^2 \text{ mm}^2 - 352^2 \text{ mm}^2) = 9047,77 \text{ (mm}^2\text{)}.$$

## Tlakové napětí



$$\sigma_d = \frac{F}{S} = \frac{500 \cdot 10^3 \text{ N}}{9047,77 \text{ mm}^2} = \underline{55,3 \text{ (MPa)}}.$$

Protože

$$\sigma_d < \sigma_{Dd},$$

sloup vyhovuje.

Obr. 34



### Otázky a úkoly:

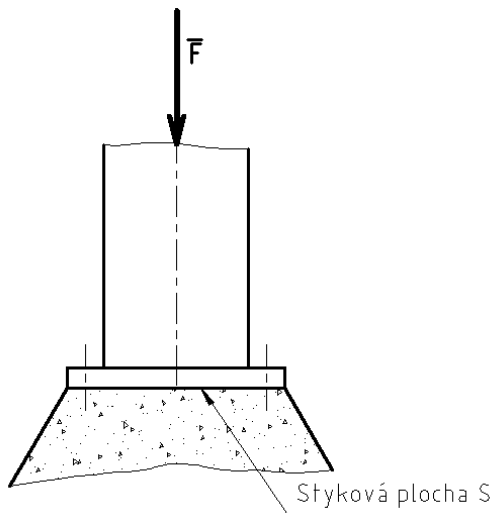
1. Objasněte podstatu řezové metody.
2. Vysvětlete postup při výpočtu návrhovém, kontrolním a únosnosti.
3. Zdůvodněte, proč v počátcích parostrojní železnice, kdy byly kolejnice odlévané z litiny (spíše ze surového železa), docházelo k častým nehodám (praskání kolejnic).
4. Popište chování tažného a křehkého materiálu při zkoušce tlakem.
5. Porovnejte tahovou a tlakovou část pracovního diagramu křehkého materiálu.
6. Podle čeho volíme součinitel bezpečnosti?
7. Co vyjadřuje Poissonovo číslo?

## 8. MĚRNÝ TLAK VE STYKOVÝCH PLOCHÁCH

Obsah této kapitoly:

- Rovinná styková plocha kolmá k zatěžující síle
- Rovinná styková plocha kosá k síle a plocha zakřivená

### 🔊) Rovinná styková plocha kolmá k zatěžující síle



Měrný tlak vypočítáme jako poměr velikosti zatěžující normální síly  $F$  obsahem stykové plochy  $S$ . Porovnáním s dovolenou hodnotou měrného tlaku dostaneme pevnostní podmínku na otláčení:

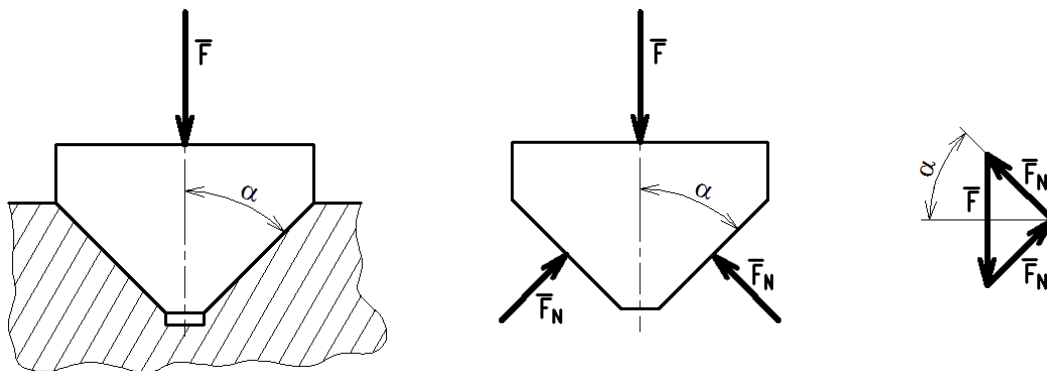
$$p = \frac{F}{S} \leq p_D.$$

Pro dovolený tlak je určující materiál s menší únosností. Můžeme např. kontrolovat, zda podklad udrží sloup, zda hlava šroubu neatlačí spojované součásti, případně můžeme navrhovat potřebnou velikost stykové plochy.

Obr. 35

### 🔊) Rovinná styková plocha kosá k síle a plocha zakřivená

Plochou, která je kosá k zatěžující síle, je např. styková plocha klínové drážky. Odvozený vztah zobecníme i pro plochu zakřivenou.



Obr. 36

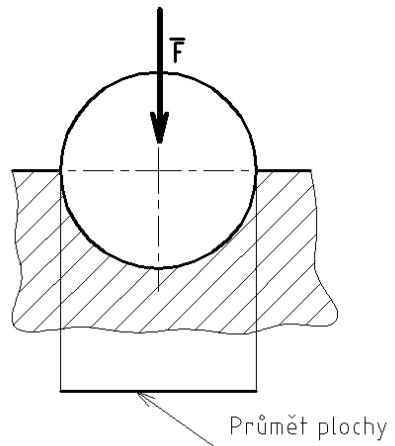
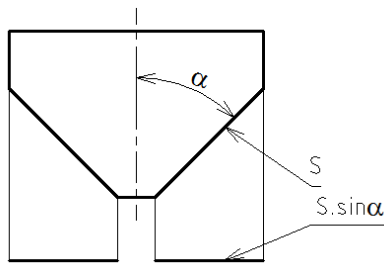
Po uvolnění vypočítáme z rovnováhy 3 sil:

$$\sin \alpha = \frac{F}{2 \cdot F_N}, \quad F_N = \frac{F}{2 \cdot \sin \alpha}.$$

Měrný tlak:

$$p = \frac{F_N}{S} = \frac{F}{2 \cdot S \cdot \sin \alpha}.$$

V uvedeném vztahu je výraz  $2 \cdot S \cdot \sin \alpha$  **průmětem otláčované plochy**. To platí i pro plochu zakřivenou (např. čep v kluzném ložisku).



Obr. 37  
Obr. 38

**Měrný tlak na zakřivenou plochu vypočítáme, když dělíme zatěžující sílu průmětem otláčované plochy do roviny kolmé k zatěžující síle. U měrného tlaku na válcovou plochu dosazujeme tedy plochu obdélníka.**

**Příklad:**



Poměr délky hřídelového čepu k jeho průměru je  $l/d = 1,5$ , dovolený tlak je  $p_D = 9 \text{ MPa}$  (kalený a broušený čep v kompozici). Radiální zatížení čepu  $F = 18\,000 \text{ N}$ . Navrhněte rozměry čepu.

**Řešení:**

Ze vztahu pro měrný tlak:

$$S_{min} = \frac{F}{p_D} = \frac{18\,000 \text{ N}}{9 \text{ MPa}} = 2\,000 \text{ (mm}^2\text{)}.$$

Obr. 39

Výpočet rozměrů:

$$S = d \cdot l = 1,5 \cdot d^2 \Rightarrow \\ \Rightarrow d = \sqrt{\frac{S}{1,5}} = \sqrt{\frac{2\,000 \text{ mm}^2}{1,5}} = \underline{37 \text{ (mm)}}.$$

Volíme normalizované rozměry ložiska:  $d = 40 \text{ mm}$ ,  $l = 60 \text{ mm}$ .



**Otázka:**

1. Co určuje dovolený tlak v předchozím příkladu?
2. Jak se vypočítá měrný tlak na kulový vrchlík?

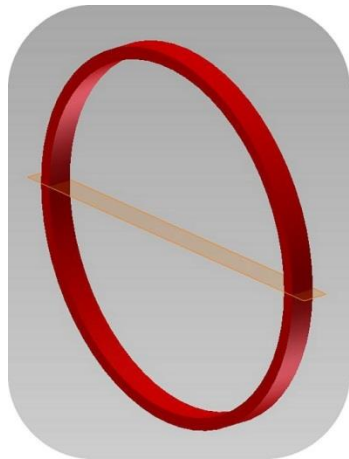
## 9. NĚKTERÉ ZVLÁŠTNÍ PŘÍPADY TAHU A TLAKU

Obsah této kapitoly<sup>1</sup>:

- Napětí v rotujícím prstenci
- Staticky neurčité případy
- Vliv teploty na namáhání součástí
- Namáhání tlakových nádob a potrubí

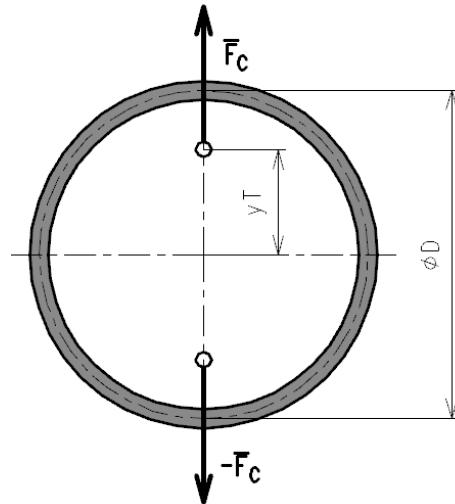
### 🔊) Napětí v rotujícím prstenci

Rotující prstenec je namáhán odstředivou silou<sup>2</sup>, která se počítá podle vztahu



$$F_C = m \cdot r \cdot \omega^2,$$

kde  $m$  je hmotnost tělesa soustředěná do těžiště,  $r$  je poloměr rotace těžiště a  $\omega$  je úhlová rychlost ( $2\pi n$ ).



Obr. 40

Obr. 41

Napětí v namáhaných průřezech  $S$  prstence (viz řezná rovina):

$$\sigma_t = \frac{F_C}{2S} = \frac{\pi r \cdot S \cdot \rho \cdot r_T \cdot \omega^2}{2S} = \frac{\pi r \cdot S \cdot \rho \cdot 2r \cdot \omega^2}{2\pi S} = \rho \cdot (r\omega)^2 = \underline{\underline{\rho \cdot v^2}}.$$

V uvedeném vztahu je  $\pi r$  polovina rozvinuté délky prstence,  $\pi r \cdot S \cdot \rho$  je hmotnost poloviny prstence a  $r_T = 2r/\pi$  poloměr rotace těžiště (viz statika – těžiště půlkružnice).

### 🔊) Staticky neurčité případy

Pokud obdržíme u uvolněného tělesa více neznámých složek vazbových sil než můžeme sestavit statických podmínek rovnováhy, jedná se o staticky neurčitý případ. Chybějící rovnice získáme např. z **deformačních podmínek** (metoda porovnávání deformací).

Připomeňme ze statiky známou **metodu uvolňování**:

- 1. Těleso (součást) uvolníme, tj. odstraníme vazby.**
- 2. Odstraněné vazby nahradíme vazbovými účinky (reakčními silami a momenty – podle druhu vazby), které reprezentují účinky odstraněných těles. Tím obnovíme rovnováhu.**

<sup>1</sup> Dříve uvedené zvláštní případy tlaku, tj. tlak ve stykových plochách a vzpěr bývají zařazovány do samostatných kapitol.

<sup>2</sup> Odstředivou silou vyjadřujeme projev setrvačnosti tělesa, které je nuceno pohybovat se po zakřivené dráze namísto pohybu rovnoměrného přímočarého (viz zákon setrvačnosti).

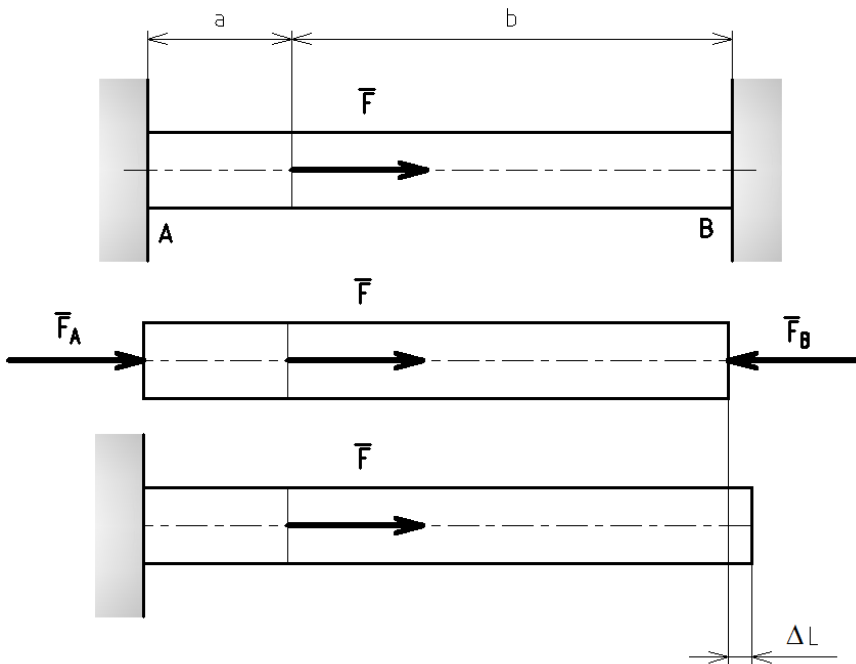
### 3. Pro soustavu vnějších zatížení a druhotných (vazbových) účinků sestavíme a řešíme potřebné rovnice.



Metoda uvolňování je základní výpočtovou metodou, v širším slova smyslu je základem celé strojní konstrukce. „Pokyn ‘nakreslete schéma uvolněného tělesa’ je klíčem k tomu stát se inženýrem.“ (Shigley).

#### Příklad:

Vypočtěte vazbové síly dané součásti.



#### Řešení:

Statická podmínka rovnováhy:

$$F_A + F - F_B = 0.$$

Deformační rovnici sestavíme z podmínky, že v mezích platnosti Hookova zákona deformaci způsobenou silou  $F$  vyrovná vazbová síla (reakce)  $F_B$ .

$$\Delta L_F - \Delta L_{F_B} = 0,$$

$$\frac{F \cdot a}{E \cdot S} - \frac{F_B \cdot (a + b)}{E \cdot S} = 0.$$

Obr. 42

Z deformační rovnice plyne:

$$F_B = F \cdot \frac{a}{a + b},$$

z podmínky rovnováhy plyne:

$$F_A = F_B - F.$$

#### 🔊 Vliv teploty na namáhání součástí

Jedná se o typické staticky neurčité případy, jejichž aplikací jsou dlouhá potrubí, železniční kolejnice, dlouhé hřídele, rotory parních turbín atd. Uvedené součásti musejí mít možnost dilatace (tj. délkové změny vlivem roztažnosti materiálu), jinak v nich vznikají značné tahové nebo tlakové síly a odpovídající napětí.

Délková změna:

$$\Delta L = \alpha \cdot L_0 \cdot \Delta t,$$

kde  $\alpha$  ( $K^{-1}$ ) je součinitel délkové roztažnosti a  $\Delta t = t_2 - t_1$  je rozdíl teplot.

Statická podmínka rovnováhy:

$$F_A - F_B = 0.$$

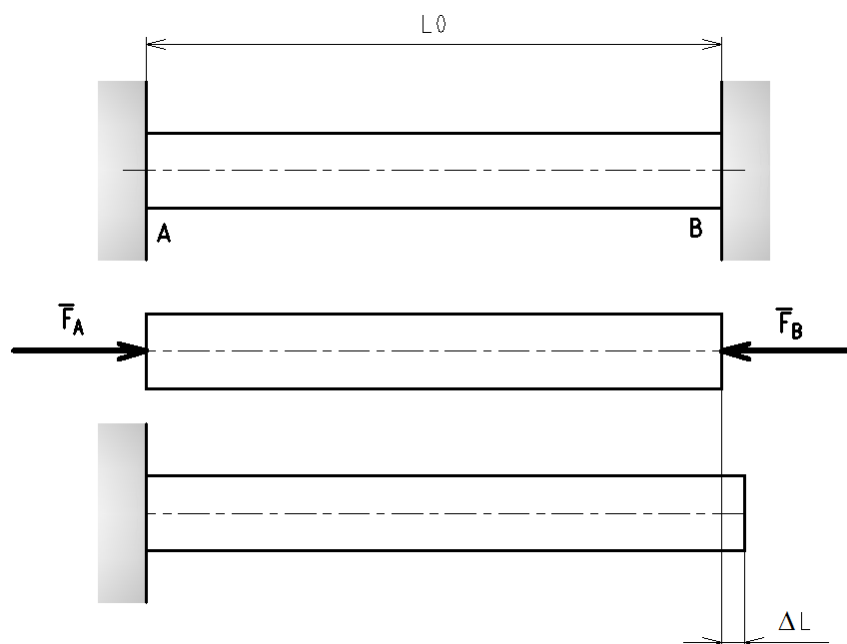
Vazbová síla vyrovnává deformaci způsobenou ohřevem či ochlazením:

$$\Delta L - \Delta L_{FB} = 0,$$

$$\alpha \cdot L_0 \cdot \Delta t - \frac{F_B \cdot L_0}{E \cdot S} = 0.$$

Z deformační podmínky a z podmínky rovnováhy plyne<sup>1</sup>:

$$F_B = F_A = E \cdot S \cdot \alpha \cdot \Delta t.$$

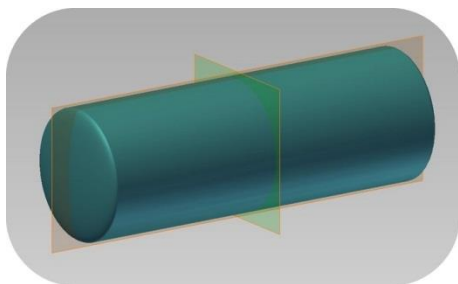


Obr. 43



Při tahových zkouškách uhlíkové oceli za vyšších teplot bychom pozorovali, že mez pevnosti zpočátku roste s teplotou a při teplotách vyšších než přibližně 300 °C rychle klesá, zatímco mez kluzu a modul pružnosti v tahu klesají již od počátku. Za vysokých teplot nastává tzv. creep (tečení materiálu), kdy vzrůstá deformace, aniž by stoupalo zatížení. V provozu nesmí být překročena přípustná rychlost tečení (mez tečení zjišťovaná zkouškami). Za nízkých teplot vzrůstá pevnost a mez kluzu a klesá houževnatost (ocel „křehne“).

### 🔊 Namáhání tlakových nádob a potrubí

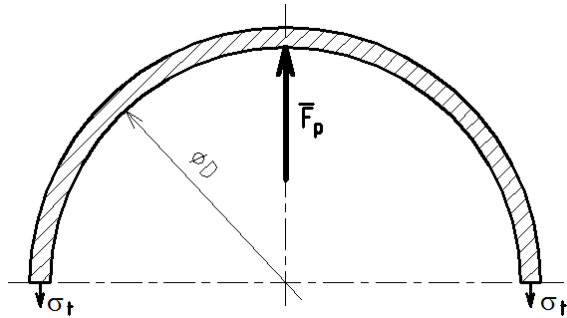


Úkolem je vypočítat a porovnat napětí v podélném a příčném řezu válcové tlakové nádoby nebo trubky, popř. navrhnout tloušťku stěny. Předpokládáme namáhání vnitřním přetlakem (při vnějším přetlaku by bylo řešení náročnější; muselo by se počítat se ztrátou tvarové stability a zhroucením nádoby – můžete vyzkoušet na plechovce od limonády).

Obr. 44

<sup>1</sup> Uvedený obrázek znázorňuje ohřev. Při ochlazení vyjde rozdíl teplot záporný a vazbové síly opačné (tah).

### Napětí v podélném řezu



Tlakovou sílu vypočítáme z přetlaku a z průmětu plochy nádoby do roviny kolmé k síle ( $l$  je délka nádoby):

$$F_p = p \cdot S_p = p \cdot D \cdot l.$$

Obr. 45

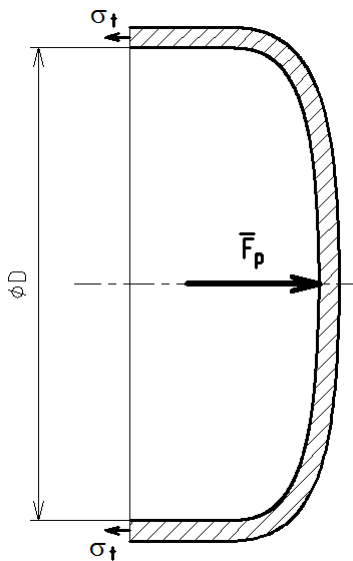
Nebezpečný průřez nádoby ( $t$  je tloušťka stěny):

$$S = 2 \cdot l \cdot t.$$

Napětí v podélném řezu:

$$\sigma_t = \frac{F_p}{S} = \frac{p \cdot D \cdot l}{2 \cdot l \cdot t} = \frac{p \cdot D}{2 \cdot t} \text{ (MPa)}.$$

### Napětí v příčném řezu



Tlaková síla:

$$F_p = p \cdot S_p = p \cdot \frac{\pi \cdot D^2}{4}.$$

Nebezpečný průřez:

$$S = \pi \cdot D \cdot t.$$

Napětí v příčném řezu:

$$\sigma_t = \frac{F_p}{S} = \frac{p \cdot \pi \cdot D^2}{4 \cdot \pi \cdot D \cdot t} = \frac{p \cdot D}{4 \cdot t} \text{ (MPa)}.$$

Obr. 46

---

**Závěr I: Napětí v podélném řezu je rovno dvojnásobku napětí v příčném řezu. Rozhodující pro dimenzování je tedy podélný řez.**

---

### Návrh tloušťky stěny

Ze vztahu pro podélný řez:

$$t_{min} = \frac{p \cdot D}{2 \cdot \sigma_{Dt}} \text{ (mm)}.$$





*Takto vypočítanou tloušťku zvětšíme o přídavek na korozi a nepřesnosti a o přídavek na sníženou únosnost svaru (vyjádřen součinitelem svarového spoje).*



**Závěr II: Optimální z hlediska hmotnosti je tlaková nádoba kulového tvaru, protože má poloviční tloušťku a tím i nižší hmotnost ve srovnání s válcovou nádobou (viz vztah pro příčný řez). Je však výrobně náročnější.**

Obr. 47

## 10. NAMÁHÁNÍ SMYKEM

Obsah této kapitoly:

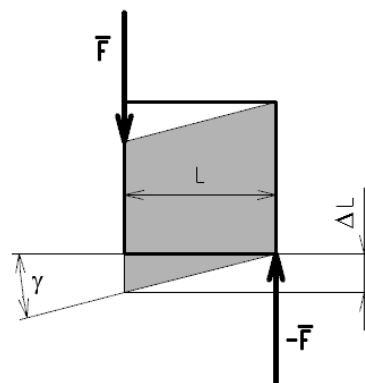
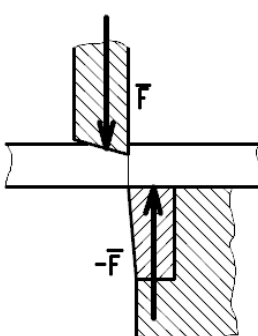
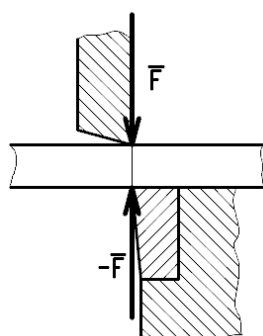
- Podstata namáhání smykem (stříhem)
- Napětí ve smyku a Hookův zákon
- Namáhání kolíků a nýtů, počet střížných průřezů
- Stříhání materiálu

### Podstata namáhání smykem (stříhem)<sup>1</sup>



Obr. 48

Na stříhaný materiál působí teoreticky střížné síly (akce a reakce) tak, že leží v jedné rovině – v rovině průřezu materiálu. Při prostém smyku (stříhu) jejich výslednice prochází těžištěm průřezu. Ve skutečnosti jsou síly mírně přesazené a tvoří dvojici, která posouvá blízké průřezy tak, že vznikne zkoso<sup>2</sup>. Poměrná velikost posunutí průřezů  $\Delta L/L$  představuje přetvoření materiálu a je analogická poměrnému prodloužení u tahu. I pro smyk platí u ocelí Hookův zákon. Pokud se materiál poruší, bylo dosaženo meze pevnosti ve smyku.



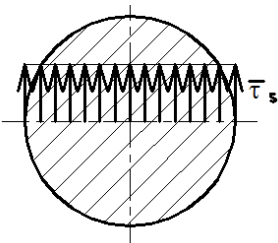
Obr. 49

Obr. 50

Obr. 51

### Napětí ve smyku a Hookův zákon

Napětí ve smyku je teoreticky rozloženo přibližně rovnoměrně, proto je výpočet jeho velikosti opět jednoduchý:



výpočtová rovnice má pak tvar

$$\tau_s = \frac{F}{S},$$

$$\tau_s = \frac{F}{S} \leq \tau_{Ds}.$$

Obr. 52

<sup>1</sup> Pojmy smyk a stříh někdy splývají, někdy bývá stříhem nazýváno namáhání, při němž je cílem porušení soudržnosti (stříhání, pojištění proti přetížení).

<sup>2</sup> Zmíněná dvojice namáhá materiál i na ohyb.

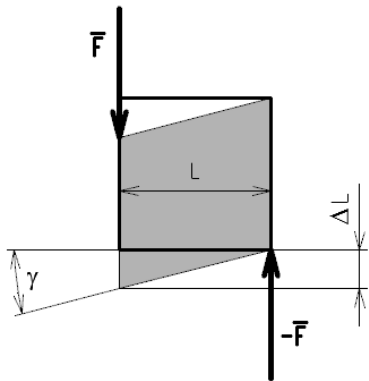


Mez pevnosti ve smyku leží u uhlíkových ocelí v rozmezí 60 – 70 % meze pevnosti v tahu. Pokud bychom provedli zkoušku smykem, měl by diagram průběh podobný tahovému.

**Také pro smyk houževnatých ocelí platí Hookův zákon:**

$$\tau = G \cdot \gamma.$$

V této rovnici je  $\tau$  smykové napětí,  $G$  modul pružnosti ve smyku a  $\gamma$  zkos.



Zkos:

$$\gamma = \frac{\Delta L}{L}.$$

Pro malé úhly můžeme trojúhelníček o odvěsnách  $\Delta L$  a  $L$  pokládat za kruhovou výseč a zkos pak odpovídá velikosti úhlu  $\gamma$  v obloukové míře<sup>1</sup>.

Obr. 53

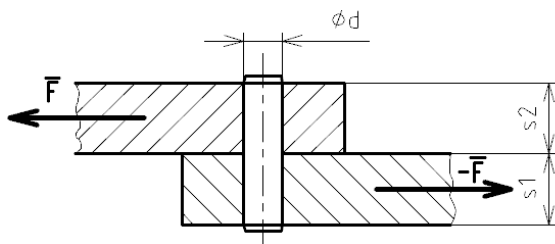
Jak už bylo uvedeno dříve, mezi modulem pružnosti v tahu a modulem pružnosti ve smyku platí

$$E = 2G(1 + \mu).$$

Pro oceli má modul pružnosti ve smyku hodnotu přibližně  $0,8 \cdot 10^5$  MPa. Poněkud vyšší hodnotu mají pružinové oceli.

### 🔊 Namáhání kolíků a nýtů, počet střižných průřezů

Konstrukční řešení některých kolíkových, nýtových i jiných spojů umožňuje rozložit namáhání na více průřezů. Základní rozdíl mezi jednostřižným a dvojtřižným kolíkem či nýtem ukazují následující schémata.



Obr. 54

**Obecně počítáme napětí ve smyku podle upravené rovnice**

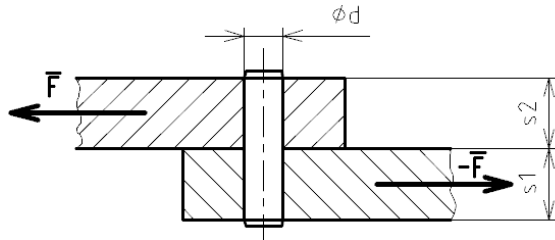
$$\tau_s = \frac{F}{i \cdot S'}$$

<sup>1</sup> Jiný výklad je, že  $\Delta L/L = \tan \gamma$  a pro malé úhly pokládáme  $\tan \gamma = \gamma$ .

kde  $i$  je počet střížných průřezů (v našem schématu 1 nebo 2). Počet střížných průřezů může být dále vynásoben počtem kolíků nebo nýtů. Tím dostaneme celkový počet střížných průřezů.

Nedílnou součástí výpočtu kolíků, nýtů, ale i dalších spojovacích součástí (per, drážkovaných hřídelů, čepů atd.) je **kontrola na otláčení**<sup>1</sup>.

### Kontrola na otláčení



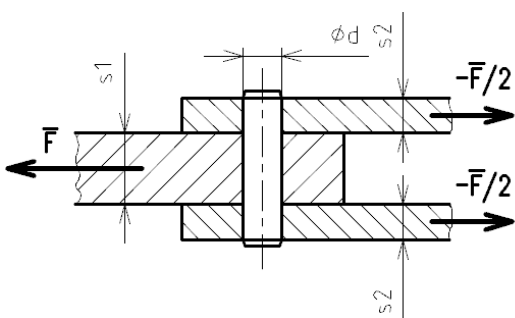
Obr. 55

Pro výpočet **maximálního měrného tlaku** ve styčné válcové ploše dosadíme do vztahu pro průmět válcové plochy menší z obou tloušťek (jsou-li různé):

$$p = \frac{F}{d \cdot s_{\min}} \leq p_D;$$

při rozdílných materiálech součástí (a různých dovolených tlacích<sup>2</sup>) kontrolujeme měrný tlak v obou otvorech.

Dvojstřížný kolík:



Tlak v otvoru prostřední součásti:

$$p_1 = \frac{F}{d \cdot s_1} \leq p_{D1},$$

tlak v otvoru slabších pásů:

$$p_2 = \frac{F}{2 \cdot d \cdot s_2} \leq p_{D2}.$$

Obr. 56

### Příklad:



Vypočítejte potřebný počet **jednostřížných nýtů** o průměru  $d = 16$  mm, aby spoj přenášel sílu  $F = 55$  kN. Dovolené napětí nýtů je 120 MPa.

### Řešení:

Výpočtovou rovnicí použijeme pro návrhový výpočet, neznámou hodnotou je počet střížných ploch, který je u **jednostřížných nýtů** roven počtu nýtů:

Obr. 57

<sup>1</sup> V uvedených případech otláčení často rozhoduje o dimenzování součástí.

<sup>2</sup> Směrodatné jsou dovolené tlaky materiálu spojovaných částí, kolíky a jiné součásti se vyrábějí většinou z materiálů odolávajících velkému měrnému tlaku.

$$\tau_s = \frac{F}{i \cdot S} \leq \tau_{Ds}$$

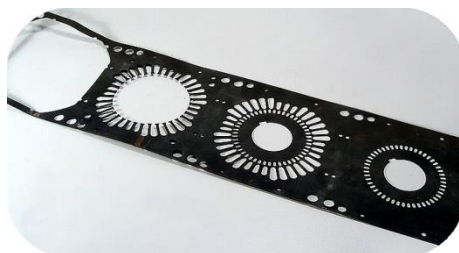
Počet nýtů:

$$i = \frac{F}{S \cdot \tau_{Ds}} = \frac{55\,000\text{ N}}{201\text{ mm}^2 \cdot 120\text{ MPa}} = \underline{3\text{ nýty}}$$

V rovnici průřez nýtů

$$S = \frac{\pi d^2}{4} = \frac{\pi \cdot 16^2\text{ mm}^2}{4} = 201\text{ (mm}^2\text{)}.$$

### 🔊) Stříhání materiálu

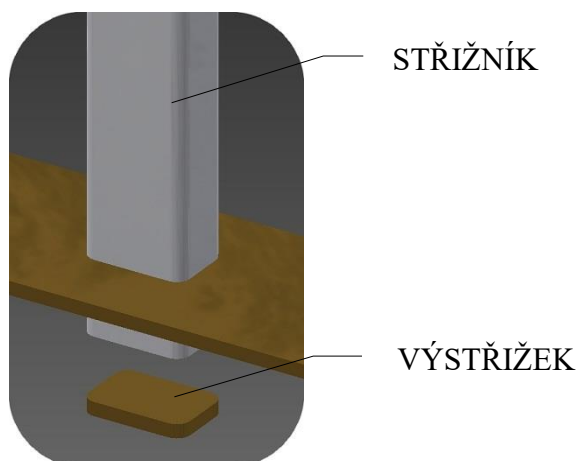


Při stříhání materiálu je cílem porušení jeho celistvosti. Ve výpočtové rovnici proto dosazujeme místo dovoleného napětí hodnotu **napětí na mezi pevnosti ve smyku**. Hledanou hodnotou je pak velikost **střížné síly** potřebné pro výrobu výstřížku:

$$F \geq S \cdot R_{ms}$$

Obr. 58

Určení střížného průřezu  $S$ :



Obr. 59

Obr. 60

---

**Obsah střížného průřezu je dán součinem obvodu a tloušťky výstřížku:  $S = o \cdot t$ .**

---

#### **Příklad:**

Vypočítejte sílu, potřebnou k vystřížení kruhového otvoru o průměru  $d = 20\text{ mm}$  v ocelovém plechu tloušťky  $t = 4\text{ mm}$ . Mez pevnosti v tahu daného materiálu je  $300\text{ MPa}$ .

#### **Řešení:**

Mez pevnosti ve smyku:  $R_{ms} = 0,6 \cdot 300\text{ MPa} = 180\text{ (MPa)}$ .

Minimální střížná síla:

$$F = S \cdot R_{ms} = o \cdot t \cdot R_{ms} = \pi d \cdot t \cdot R_{ms} = \pi \cdot 20\text{ mm} \cdot 4\text{ mm} \cdot 180\text{ MPa} = \underline{45\,239\text{ (N)}}$$



**Otázky a úkoly:**

1. Jak byste vypočítali měrný tlak mezi ložiskem a kulovým čepem?
2. Proč uzenina (párek) praská při vaření vždy podélně, nikdy příčně?
3. Proč vzniká při smyku zkos?
4. Jak se vypočítá minimální střižná síla?

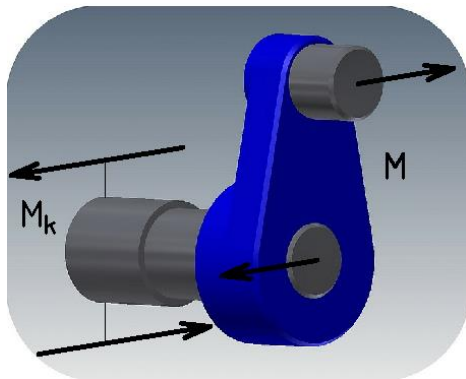
## 11. NAMÁHÁNÍ KRUHOVÝCH PRŮŘEZŮ NA KRUT

Obsah této kapitoly:

- Podstata namáhání krutem, rozložení napětí
- Pevnostní rovnice, průřezové veličiny pro krut
- Deformace při krutu
- Výpočet kruhových hřídelů

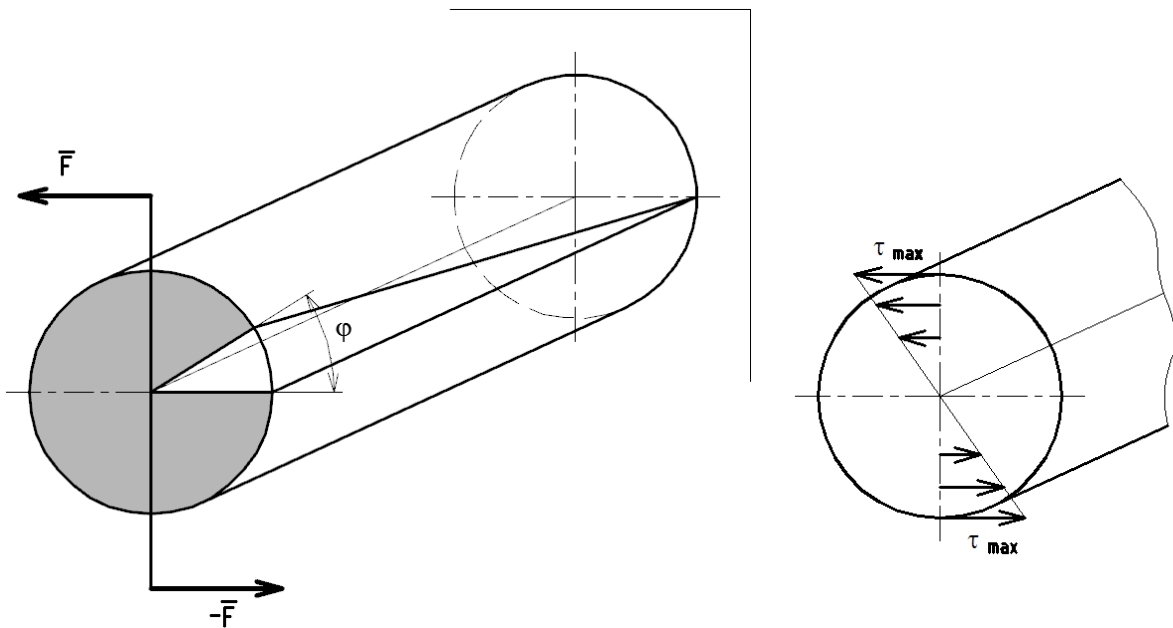
### Podstata namáhání krutem, rozložení napětí

Pro výpočet namáhání na krut už nestačí znát pouze velikost síly; její účinek závisí i na poloze.



Namáhání na krut způsobuje **silová dvojice**, která působí v rovině rovnoběžné s průřezem. Momentu vnějších sil **M** vzdoruje moment vnitřních sil **M<sub>k</sub>** a v průřezech součásti vzniká **smykové napětí**. Největší napětí je u kruhového průřezu na obvodu, v ose průřezu je nulové. Velikost napětí se u materiálů, pro něž platí Hookův zákon, mění podle přímky. Zkroucený prut se deformuje tak, že povrchová přímka přechází ve strmou šroubovici a poloměr se potočí o úhel zkroucení  $\varphi$ .

Obr. 61

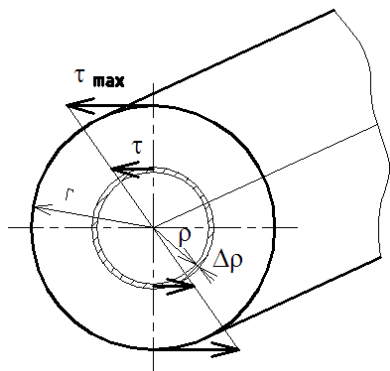


Obr. 62

Obr. 63

### Pevnostní rovnice, průřezové veličiny pro krut

Odvození pevnostní rovnice, z níž vyplyne důležitá charakteristika průřezu, provedeme na základě následující úvahy: Protože se napětí mění podle poloměru hřídele, vyčleníme velmi úzký mezikruhový proužek o obsahu  $\Delta S$ , v němž můžeme napětí pokládat za konstantní v celé šířce. Poloměr tohoto proužku  $\rho$  je proměnnou hodnotou v mezích od 0 do  $r$ . Vztah mezi napětím v obecně položeném proužku (elementu průřezu) a maximálním napětím je dán podobností trojúhelníků.



Obr. 64

$$\frac{\tau}{\tau_{max}} = \frac{\rho}{r}, \quad \tau = \tau_{max} \cdot \frac{\rho}{r}$$

Elementární moment vnitřních sil:

$$\Delta M_k = \Delta F \cdot \rho = \tau \cdot \Delta S \cdot \rho = \tau_{max} \cdot \frac{\rho}{r} \cdot \Delta S \cdot \rho,$$

po úpravě:

$$\Delta M_k = \tau_{max} \cdot \frac{\Delta S \cdot \rho^2}{r}$$

Výsledný moment je dán součtem všech elementárních momentů<sup>1</sup>:

$$M_k = \sum \Delta M_k = \tau_{max} \cdot \frac{\sum \Delta S \cdot \rho^2}{r}$$

**Vztah  $\sum \Delta S \cdot \rho^2$  se nazývá polární moment plochy. Označuje se  $J_p$  a udává se v  $\text{cm}^4$  nebo v  $\text{mm}^4$ . Závisí na velikosti a rozložení (tvaru) plochy.**

**Vztah  $\frac{\sum \Delta S \cdot \rho^2}{r}$  se nazývá průřezový modul v krutu (poměr polárního momentu a vzdálenosti krajního vlákna od osy průřezu). Označuje se  $W_k$  a udává se v  $\text{cm}^3$  nebo v  $\text{mm}^3$ .**

**S těmito veličinami pak můžeme pevnostní rovnici v krutu zapsat takto:**

$$\tau_{max} = \frac{M_k}{W_k} \leq \tau_{Dk}$$

Kvadratický moment použijeme při výpočtu deformace (úhlu zkroucení).

### Dovolené napětí v krutu

Pro ocel můžeme použít vztahu

$$\tau_{Ds} = 0,6 \frac{0,6R_m}{k},$$

který vychází z poznatku, že mez pevnosti v krutu (ve smyku) je rovna přibližně 60 % meze pevnosti v tahu a mez kluzu ve smyku je rovna 60 % meze kluzu. Pro litinu s kruhovým průřezem uvažujeme dovolené napětí ve smyku stejné jako dovolené napětí v tahu.

Součinitele  $c_{II}$  a  $c_{III}$  jsou stejné jako u namáhání tahem.

### Průřezové charakteristiky ( $J_p$ , $W_k$ ) pro kruh a mezikruží

<sup>1</sup> Se znalostí práce s nekonečně malými veličinami bychom rovnici odvodili za použití integrálu:

$$M_k = \tau_{max} \cdot \frac{\int dS \cdot \rho^2}{r}$$



Vztahy, odvozené pomocí vyšší matematiky, nalezneme ve strojnických tabulkách. Pro mezikruží můžeme vztahy jednoduše odvodit z kruhových ploch.



Při odvozování vztahů pro mezikruží je třeba mít na paměti, že polární momenty lze sčítat a odčítat (podobně jako obsahy), protože tyto hodnoty vznikly jako součet (integrál). Průřezové moduly je nutno počítat z definice (poměr polárního momentu a vzdálenosti krajního vlákna od osy průřezu).

V praktických výpočtech často používáme uvedené zjednodušené vztahy.

Průřez	Polární moment	Průřezový modul
	$J_p = \frac{\pi D^4}{32},$ <p>po zjednodušení <math>J_p = 0,1D^4</math></p>	$W_k = \frac{\pi D^3}{16},$ <p>po zjednodušení <math>W_k = 0,2D^3</math></p>
	$J_p = \frac{\pi}{32} \cdot (D^4 - d^4),$ $J_p = 0,1(D^4 - d^4)$	$W_k = \frac{\pi}{16} \cdot \frac{D^4 - d^4}{D},$ $W_k = 0,2 \cdot \frac{D^4 - d^4}{D}$

Odvození hodnot pro mezikruží:

$$J_p = J_{p1} - J_{p2} = \frac{\pi D^4}{32} - \frac{\pi d^4}{32} = \frac{\pi}{32} \cdot (D^4 - d^4),$$

$$W_k = \frac{J_{p1} - J_{p2}}{\frac{D}{2}} = \frac{\pi}{16} \cdot \frac{D^4 - d^4}{D}.$$

#### **Příklad:**

Vypočtete, jaký největší moment může přenášet hřídel kruhového průřezu o průměru 20 mm při dovoleném napětí 32 MPa.

#### **Řešení:**

Jedná se o výpočet únosnosti. Z pevnostní rovnice plyne:

$$M_{kmax} = W_k \cdot \tau_{Dk},$$

$$W_k = \frac{\pi D^3}{16} = \frac{\pi \cdot 20^3 \text{ mm}^3}{16} = 1\,570,8 \text{ (mm}^3\text{)},$$

$$M_{kmax} = 1\,570,8 \text{ mm}^3 \cdot 32 \text{ MPa} = 50\,265,6 \text{ (Nmm)} = \underline{\underline{50,3 \text{ (Nm)}}}.$$

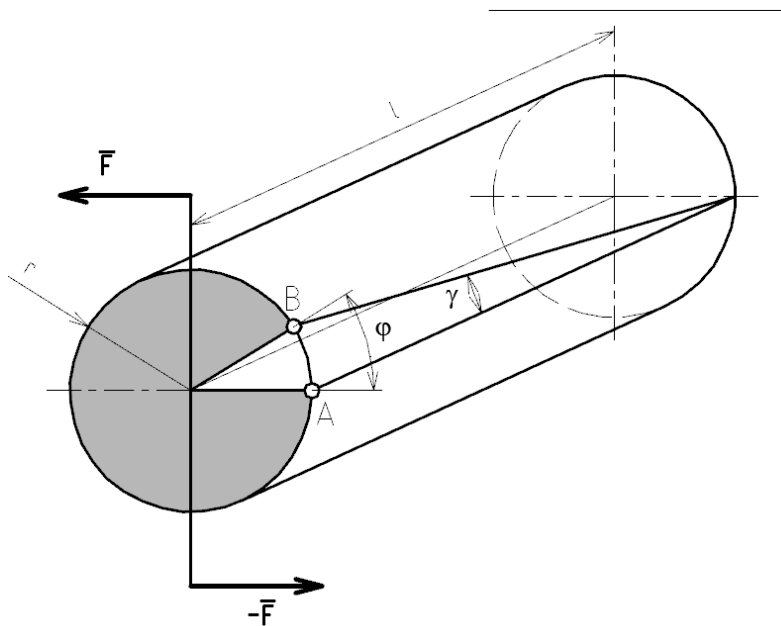
## Deformace při krutu

Základní hodnotou je **úhel zkroucení**. Pro malé úhly zkroucení platí (viz obr.):

$$AB = r \cdot \varphi = l \cdot \gamma,$$

kde úhly  $\varphi$  a  $\gamma$  jsou v obloukové míře (rad).

Za úhel  $\gamma$  (zkos) dosadíme z Hookova zákona



$$\tau = G \cdot \gamma, \gamma = \frac{\tau}{G}$$

a z pevnostní rovnice

$$\tau = \frac{M_k}{W_k} = \frac{M_k}{\frac{J_p}{r}}$$

Obdržíme:

$$r \cdot \varphi = l \cdot \frac{M_k}{\frac{J_p}{r} \cdot G}$$

Úhel zkroucení:

$$\varphi = \frac{M_k l}{G J_p} \text{ (rad).}$$

Obr. 65

Úhel zkroucení ve stupních:

$$\varphi = \frac{180}{\pi} \cdot \frac{M_k l}{G J_p}.$$

### Zkrut:

Jak je vidět z obrázku, úhel zkroucení je závislý na délce. Dělíme-li úhel zkroucení délkou  $l$ , obdržíme měrný úhel zkroucení, neboli zkrut  $\vartheta$ .

$$\vartheta = \frac{\varphi}{l} = \frac{M_k}{G J_p} \text{ (rad} \cdot \text{m}^{-1}\text{)}, \vartheta = \frac{180}{\pi} \cdot \frac{M_k}{G J_p} \text{ (}^\circ \cdot \text{m}^{-1}\text{)}.$$

### Příklad:

Hřídel o průměru 40 mm a délce 2,2 m přenáší krouticí moment  $M_k = 125 \text{ Nm}$ . Modul pružnosti ve smyku je  $G = 0,8 \cdot 10^5 \text{ MPa}$ . Vypočítejte úhel zkroucení a zkrut.

### Řešení:

Polární moment:

$$J_p = \frac{\pi D^4}{32} = \frac{\pi \cdot 40^4 \text{ mm}^4}{32} = 251\,327,4 \text{ (mm}^4\text{)}.$$

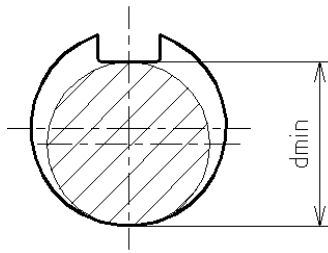
Úhel zkroucení ve stupních:

$$\varphi = \frac{180}{\pi} \cdot \frac{M_k l}{G J_p} = \frac{180}{\pi} \cdot \frac{125 \cdot 10^3 \text{ Nmm} \cdot 2\,200 \text{ mm}}{0,8 \cdot 10^5 \text{ MPa} \cdot 251\,327,4 \text{ mm}^4} \doteq \underline{0,8 \text{ (}^\circ\text{)}}.$$

Zkrut:

$$\vartheta = \frac{\varphi}{l} = \frac{0,8^\circ}{2,2 \text{ m}} = \underline{0,36 \text{ (}^\circ \cdot \text{m}^{-1}\text{)}}.$$

### 🔊) Výpočet kruhových hřídelů



Předběžný výpočet konce hřídele navrhujeme z dovoleného namáhání na krut, nebo z dovoleného zkrutu. Použije se vztahu, z něhož vychází větší průměr.

Výpočet z dovoleného napětí:

$$\tau_{max} = \frac{M_k}{W_k} \leq \tau_{Dk}, d_{min} = \sqrt[3]{\frac{16 M_k}{\pi \cdot \tau_{Dk}}}.$$

Obr. 66



*Protože jsou obvykle zadány hodnoty výkonu  $P$  v kW a otáček v  $\text{min}^{-1}$  a dovolené napětí při předběžném výpočtu volíme 20 – 25 MPa s ohledem na další namáhání (ohyb), můžeme použít zjednodušeného vztahu pro předběžný výpočet:*

$$d_{min} = 120 \cdot \sqrt[3]{\frac{P}{n}} \text{ (mm; kW; min}^{-1}\text{)}.$$

Výpočet z dovoleného zkrutu (bývá  $0,25^\circ \cdot \text{m}^{-1}$ ):

$$\vartheta = \frac{180}{\pi} \cdot \frac{M_k}{G J_p} \leq \vartheta_D, d_{min} = \sqrt[4]{\frac{180 \cdot 32 \cdot M_k}{\pi^2 \cdot G \cdot \vartheta_D}}.$$



*Vzhledem k obvyklým hodnotám můžeme i zde použít zjednodušeného vztahu pro předběžný výpočet:*

$$d_{min} = 120 \cdot \sqrt[4]{\frac{P}{n}} \text{ (mm; kW; min}^{-1}\text{)}.$$

Po tomto výpočtu navrhne konec hřídele s ohledem na drážku pro pero a celkový tvar s přihlédnutím k uložení kol atd. Pak následuje kontrolní výpočet hřídele na kombinované namáhání. K tomu potřebujeme znát velikosti a působišť dalších sil a momentů.

**Příklad:**

Navrhněte průměr hřídele s drážkou pro pero. Hřídel bude přenášet výkon 10 kW při otáčkách  $n = 1500 \text{ min}^{-1}$ . Dovolené napětí je 22 MPa, dovolený zkrut  $0,25 \text{ }^\circ \cdot \text{m}^{-1}$ .

**Řešení:**

Krouticí moment:

$$M_k = \frac{P}{\omega} = \frac{10\,000 \text{ W}}{2\pi \cdot \frac{1500 \text{ min}^{-1}}{60 \text{ s}}} = 63,7 \text{ (Nm)} = 63,7 \cdot 10^3 \text{ (Nmm)}.$$

Průměr hřídele z dovoleného napětí:

$$d_{min} = \sqrt[3]{\frac{16M_k}{\pi \cdot \tau_{Dk}}} = \sqrt[3]{\frac{16 \cdot 63,7 \cdot 10^3 \text{ Nmm}}{\pi \cdot 25 \text{ MPa}}} = 23,5 \text{ (mm)},$$

pro srovnání použijeme zjednodušeného vztahu:

$$d_{min} = 120 \cdot \sqrt[3]{\frac{P}{n}} = 120 \cdot \sqrt[3]{\frac{10 \text{ kW}}{1500 \text{ min}^{-1}}} = 22,6 \text{ (mm)}.$$

Průměr z dovoleného zkrutu (zkrut převeden na  $^\circ \cdot \text{mm}^{-1}$ ):

$$d_{min} = \sqrt[4]{\frac{180 \cdot 32 \cdot M_k}{\pi^2 \cdot G \cdot \vartheta_D}} = \sqrt[4]{\frac{180 \cdot 32 \cdot 63,7 \cdot 10^3 \text{ Nmm}}{\pi^2 \cdot 0,8 \cdot 10^5 \text{ MPa} \cdot 0,25 \cdot 10^{-3} \text{ }^\circ \cdot \text{mm}^{-1}}} = 37 \text{ (mm)},$$

zjednodušený vztah:

$$d_{min} = 120 \cdot \sqrt[4]{\frac{P}{n}} = 120 \cdot \sqrt[4]{\frac{10 \text{ kW}}{1500 \text{ min}^{-1}}} = 34,3 \text{ (mm)}.$$

S ohledem na zeslabení drážkou pro pero volíme průměr konce hřídele  $d = 40 \text{ mm}$ .



**Otázky a úkoly:**

1. Které charakteristiky průřezu udáváme u namáhání krutem?
2. Proč nestačí pro výpočet napětí v krutu pouze obsah plochy průřezu?
3. Jak se vypočítá napětí v krutu, úhel zkroutení a zkrut?
4. Jak závisí dovolené napětí a zkrut na druhu oceli?

## 12. NAMÁHÁNÍ NA OHYB

Obsah této kapitoly:

- Základní pojmy, druhy nosníků a zatížení
- Vnitřní statické účinky
- Ohybové napětí a pevnostní rovnice
- Průřezové charakteristiky pro ohyb
- Deformace při ohybu
- Složené zatížení, metoda superpozice

### Základní pojmy, druhy nosníků a zatížení

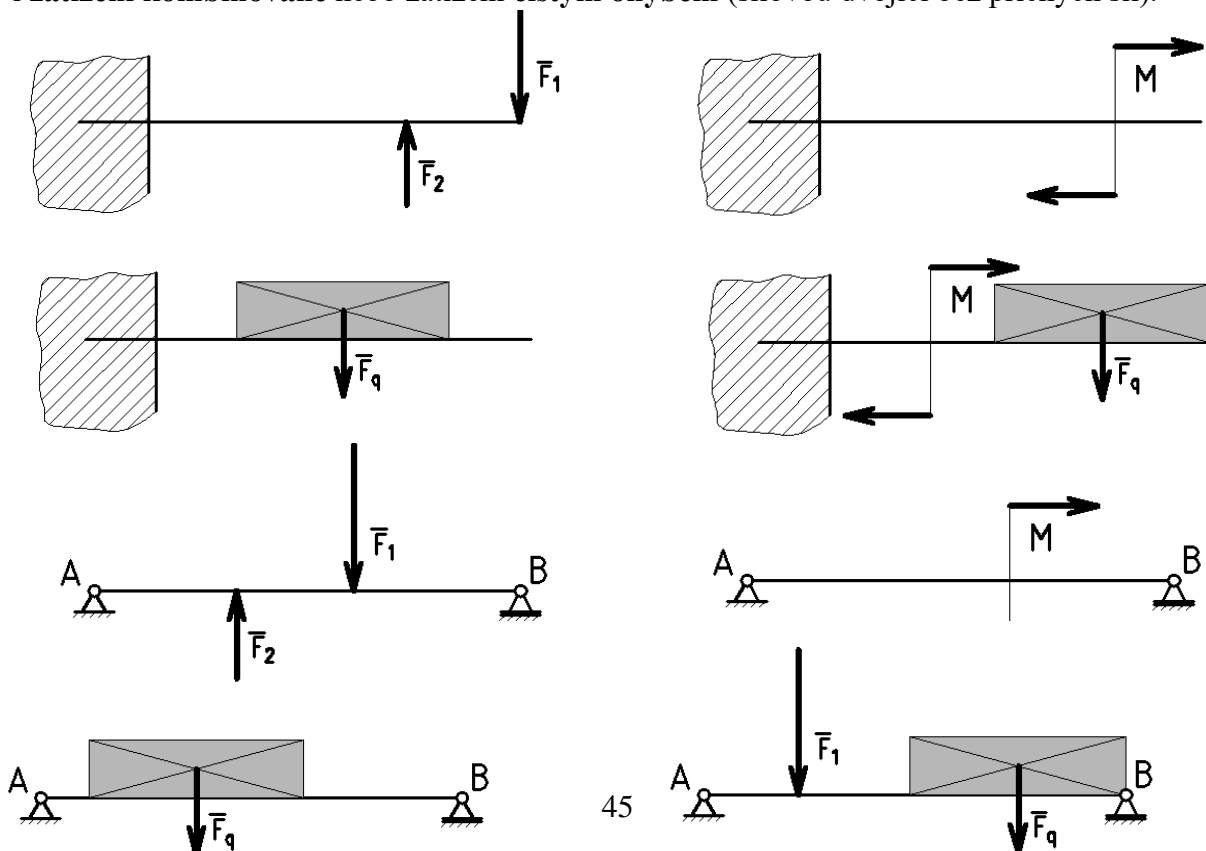
Součásti namáhané na ohyb nazýváme **nosníky**. Patří sem hřídele, nápravy vozidel, páky, některé pružiny (obr.), mosty a další prvky stavebních konstrukcí apod. Základní rozdělení je na



**nosníky vetknuté** (krakorcové) a **nosníky na dvou (kloubových) podporách** zatížené silami mezi podporami (prosté), nosníky s převislými konci atd. Nosníky mohou být **staticky určité** (nejvýše 3 neznámé složky vazbových sil) a **staticky neurčité** (4 a více neznámých složek). U staticky neurčitých nosníků doplňujeme statické podmínky rovnováhy podmínkami deformačními (např. průhyb v podpoře je roven 0).

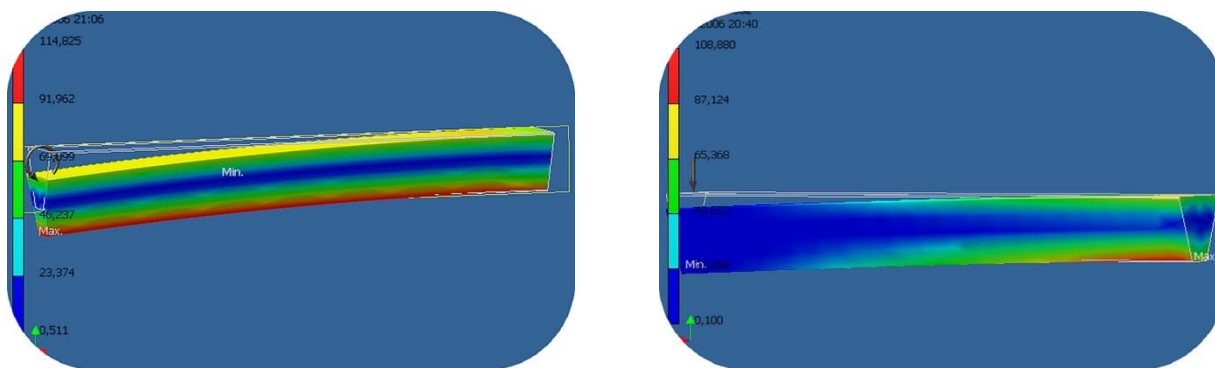
Obr. 67

Ohyb je způsoben momentem **silové dvojice**, jejíž rovina prochází podélnou osou nosníku. Ohyb způsobený příčnými silami je doprovázen smykem způsobeným posouvající silou. Zatížení rozdělujeme podle toho, zda se jedná o **osamělé síly** nebo o **spojité zatížení**. Osamělá síla je rozložena na ploše, která je zanedbatelná vzhledem k celkové velikosti nosníku, spojité zatížení je rozloženo na celé délce nebo na její části, jejíž velikost není zanedbatelná. Vyskytuje se i **zatížení kombinované** nebo **zatížení čistým ohybem** (silovou dvojicí bez příčných sil).



Obr. 68

Rozdíl mezi **čistým ohybem** a **ohybem doprovázeným smykem** si ukážeme na vetknutém nosníku.



Obr. 69

a)

b)

Na obrázku a) je vetknutý nosník zatížen silovou dvojicí, barvy znázorňují velikost napětí v jednotlivých průřezích nosníku. Je zřejmé, že **nosník je ve všech průřezích vystaven stejným hodnotám napětí<sup>1</sup>**. Na obrázku b) je vetknutý nosník zatížen na volném konci osamělou silou kolmou k ose nosníku. Největší napětí jsou ve vetknutí (červená a žlutá barva), na konci, kde je největší posunutí, je ohybové napětí nejmenší (teoreticky nulové) a nosník je zatížen pouze **posouvající (smykovou) silou**. Z toho plyne, že v tomto případě není materiál optimálně využit.

### Vnitřní statické účinky

Vnitřními statickými účinky nazýváme **vnitřní síly a momenty** působící v myšleném řezu, jímž rozdělíme nosník ve vyšetřovaném místě. Tyto vnitřní síly a momenty mají obecně v každém průřezu nosníku jinou velikost, a proto musíme vyšetřit jejich **průběh po délce nosníku a určit největší velikost**. Průběhy znázorňujeme graficky.

---

**Vnitřní statické účinky jsou:**

1. Normálová síla  $F_n$ ,
  2. Posouvající síla  $F_t$ ,
  3. Ohybový moment  $M_o$ .
- 

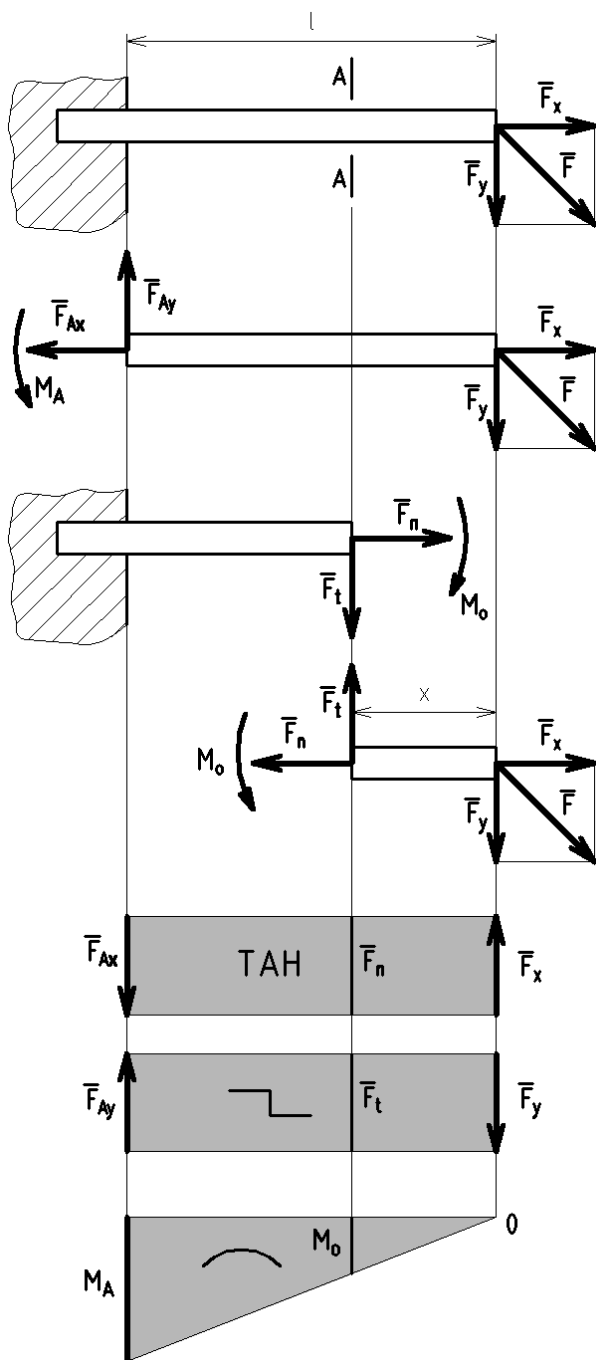
### **Vnitřní statické účinky u vetknutého nosníku s jednou osamělou silou:**

Na volný konec působí síla  $F$  obecného směru, jejíž složky uvedeme do rovnováhy vnitřními silami v libovolném řezu: normálovou silou  $F_n$  a posouvající silou  $F_t$ . Svislá složka síly  $F$  tvoří s posouvající silou silovou dvojici, kterou uvedeme do rovnováhy ohybovým momentem vnitřních sil  $M_o$ .

Velikost normálové a posouvající síly nezávisí v tomto jednoduchém případě na poloze řezu, ohybový moment vzrůstá se vzdáleností lineárně.

---

<sup>1</sup> V průřezu ovšem není napětí rozloženo rovnoměrně, což je vidět z rozložení barev.



a) Schéma zatížení.

b) Uvolnění nosníku, řešení vazbových účinků – podmínky rovnováhy:

$$F_x - F_{Ax} = 0, F_{Ax} = F_x,$$

$$F_{Ay} \cdot l - M_A = 0, M_A = F_{Ay} \cdot l.$$

c) Myšlený řez v obecném místě, vnitřní statické účinky (počítáno zprava, zleva bychom došli ke stejným výsledkům – princip akce a reakce)<sup>1</sup>:

$$F_x - F_n = 0, F_n = F_x = \text{konst.},$$

$$F_y - F_t = 0, F_t = F_y = \text{konst.},$$

$$F_y \cdot x - M_o = 0, M_o = F_y \cdot x.$$

d) Průběh normálové síly: normálová síla je ve všech průřezech stejná. Směřuje z průřezu ven a namáhá nosník na tah.

e) Průběh posouvající síly: ve všech průřezech je stejná a má po celé délce stejné znaménko (viz dále)<sup>2</sup>.

f) Průběh ohybového momentu: vzrůstá přímo úměrně se vzdáleností od volného konce (rovnice  $M_o = F_y \cdot x$  je rovnicí přímky  $y = k \cdot x$ . Po celé délce má stejné znaménko.

Obr. 70

---

**Maximální ohybový moment je u tohoto nosníku ve vetknutí, kdy  $x = l$ :**

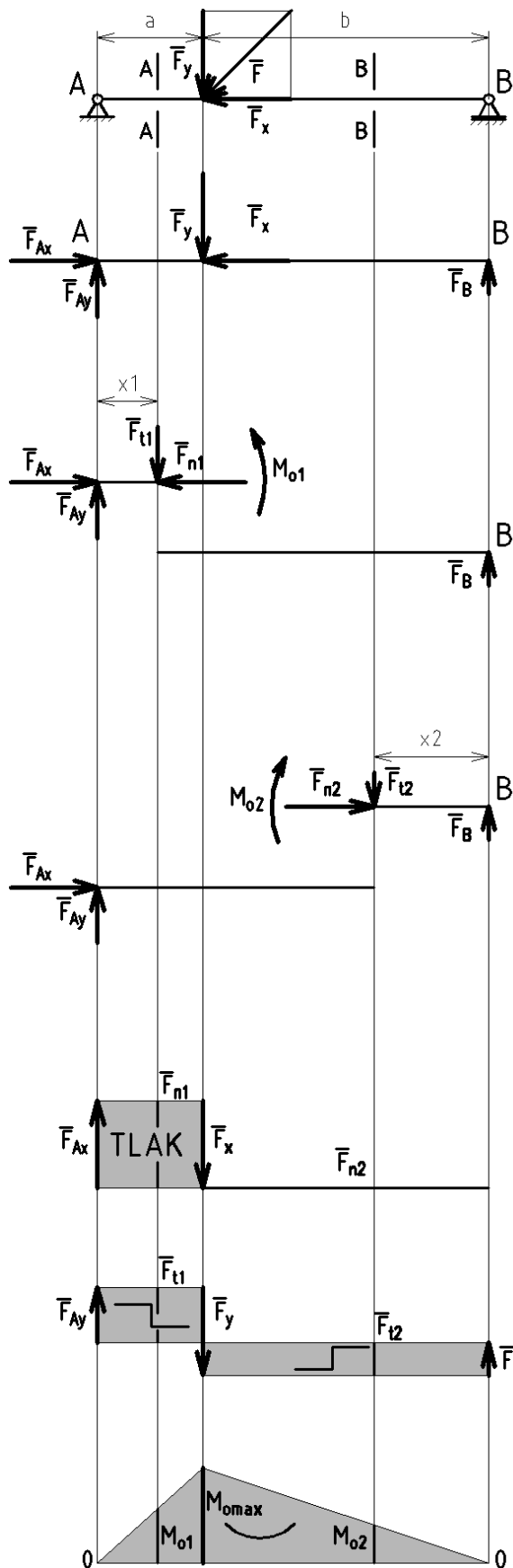
$$M_{omax} = F_y \cdot l = M_A.$$


---

<sup>1</sup> Autor si uvědomuje, že vnitřní síly působící na obě části nosníku (např. posouvající síly) by měly mít buď opačná znaménka, nebo odlišná označení, protože jde o různé vektory (akce a reakce). Tato vědomá chyba je ponechána z důvodu obavy, aby opačná znaménka nebyla pro žáky matoucí.

<sup>2</sup> Nosník je tedy namáhán kromě ohybu i na smyk, ale nosníky s větší délkou počítáme zpravidla jen na ohyb.

### Vnitřní statické účinky u nosníku na dvou podporách s jednou osamělou silou:



a) Schéma zatížení.

b) Uvolnění nosníku, řešení vazbových účinků – podmínky rovnováhy:

$$F_y \cdot a - F_B \cdot l = 0, \quad F_B = F_y \cdot \frac{a}{l},$$

$$F_y \cdot b - F_A \cdot l = 0, \quad F_A = F_y \cdot \frac{b}{l}.$$

c) Myšlený řez v obecném místě, vnitřní statické účinky:

zleva:

$$F_{Ax} - F_{n1} = 0, \quad \underline{F_{n1} = F_{Ax} = konst.},$$

$$F_{Ay} - F_{t1} = 0, \quad \underline{F_{t1} = F_{Ay} = konst.},$$

$$F_{Ay} \cdot x_1 - M_{o1} = 0, \quad \underline{M_{o1} = F_B \cdot x_1},$$

zprava:

$$\underline{F_{n2} = 0 = konst.},$$

$$F_B - F_{t2} = 0, \quad \underline{F_{t2} = F_B = konst.},$$

$$F_B \cdot x_2 - M_{o2} = 0, \quad \underline{M_{o2} = F_B \cdot x_2}.$$

d) Průběh normálové síly: normálová síla je zleva v rozsahu  $0 - a$  ve všech průřezech stejná. Namáhá nosník na tlak. Zprava v rozsahu  $0 - b$  (nebo zleva v rozsahu  $a - a+b$ ) má nulovou hodnotu.

e) Průběh posouvající síly: posouvající síla je zleva v rozsahu  $0 - a$  ve všech průřezech stejná a má velikost  $F_{Ay}$ . Zprava v rozsahu  $0 - b$  (nebo zleva v rozsahu  $a - a+b$ ) má velikost  $F_B$  a opačné znaménko.

f) Průběh ohybového momentu: vzrůstá přímo úměrně se vzdáleností od podpor až k hodnotě  $M_{omax}$ . Má stále stejné znaménko.

Obr. 71



---

**Maximální ohybový moment je u tohoto nosníku pod silou F a jeho velikost je:**

$$M_{omax} = F_{Ay} \cdot a = F_B \cdot b.$$

---



*Poznámka ke znaménkům vnitřních statických účinků: pro zavedení znamének můžeme použít buď značek uvedených ve schématu, nebo dodržet následující konvenci:*

*Normálová síla: tahová síla +, tlaková síla –.*

*Posouvající síla: levá síla nahoru, pravá dolů +, levá síla dolů, pravá nahoru –.*



*Ohybový moment: posuzujeme podle zakřivení ohybové čáry.*



---

**Z podmínek rovnováhy při řezové metodě plynou následující závěry:**

- 1. Velikost vnitřního statického účinku (normálové síly, posouvající síly a ohybového momentu) se rovná algebraickému součtu sil nebo momentů po jedné straně myšleného řezu.**
- 2. Volíme zpravidla vždy stranu, kde působí méně vnějších sil nebo momentů, výpočet bude jednodušší.**

**Schwedlerova věta:**

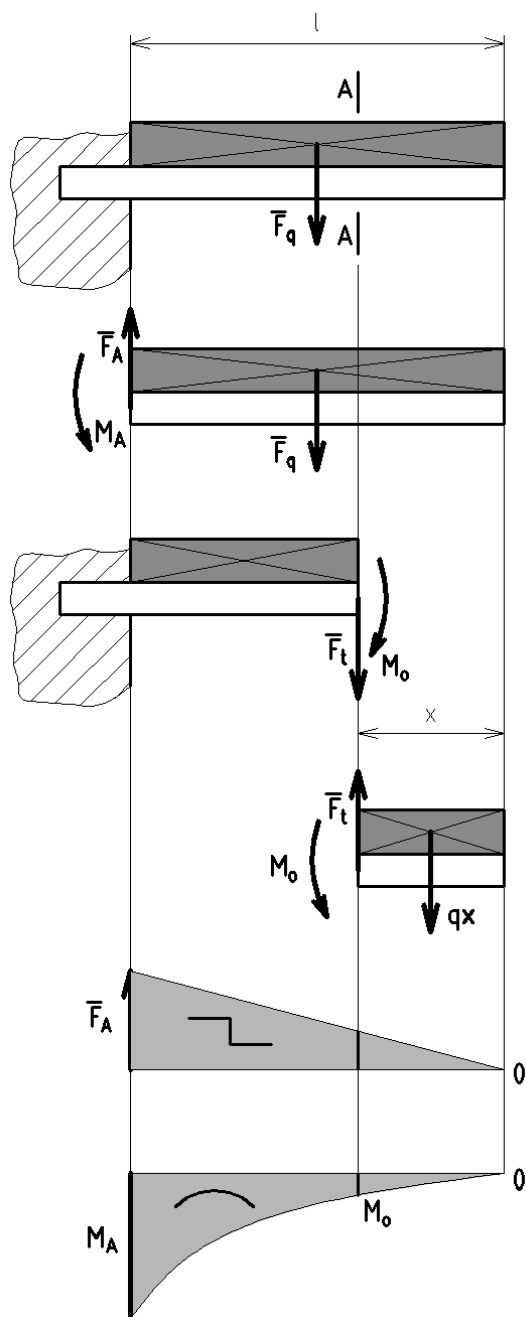
**Maximální ohybový moment je v místě, kde posouvající síla mění své znaménko, nebo je rovna nule<sup>1</sup>.**

---

<sup>1</sup> Obsah kladné plochy obrazce posouvajících sil se číselně rovná obsahu záporné plochy a největšímu ohybovému momentu:  $F_{Ay} \cdot a = F_B \cdot b$ .

### Vnitřní statické účinky u vetknutého nosníku s rovnoměrně rozloženým spojitým zatížením:

Směrem od volného konce k vetknutí vzrůstá zatížení, proto má obrazec posouvajících sil tvar trojúhelníka a obrazec momentů je parabolickou úsečí.



a) Schéma zatížení. Zatížení na jednotku délky  $q$  ( $\text{Nm}^{-1}$ ), výsledná síla  $F_q = ql$ .

b) Uvolnění nosníku, řešení vazbových účinků – podmínky rovnováhy:

$$\begin{aligned} F_q - F_A &= 0, & F_q &= F_A, \\ M_A - F_q \cdot \frac{l}{2} &= 0, & M_A &= \frac{ql^2}{2}. \end{aligned}$$

c) Myšlený řez v obecném místě, vnitřní statické účinky (zprava):

$$\begin{aligned} F_t - qx &= 0, & F_t &= qx, \\ M_o - qx \cdot \frac{x}{2} &= 0, & M_o &= \frac{qx^2}{2}. \end{aligned}$$

d) Průběh posouvajících sil: posouvající síla se rovnoměrně zvětšuje směrem k vetknutí a má stále stejné znaménko.

e) Průběh ohybového momentu: Zvětšuje se směrem k vetknutí podle paraboly (rovnice momentu je rovnicí paraboly) a má po celé délce stejné znaménko.

Obr. 72

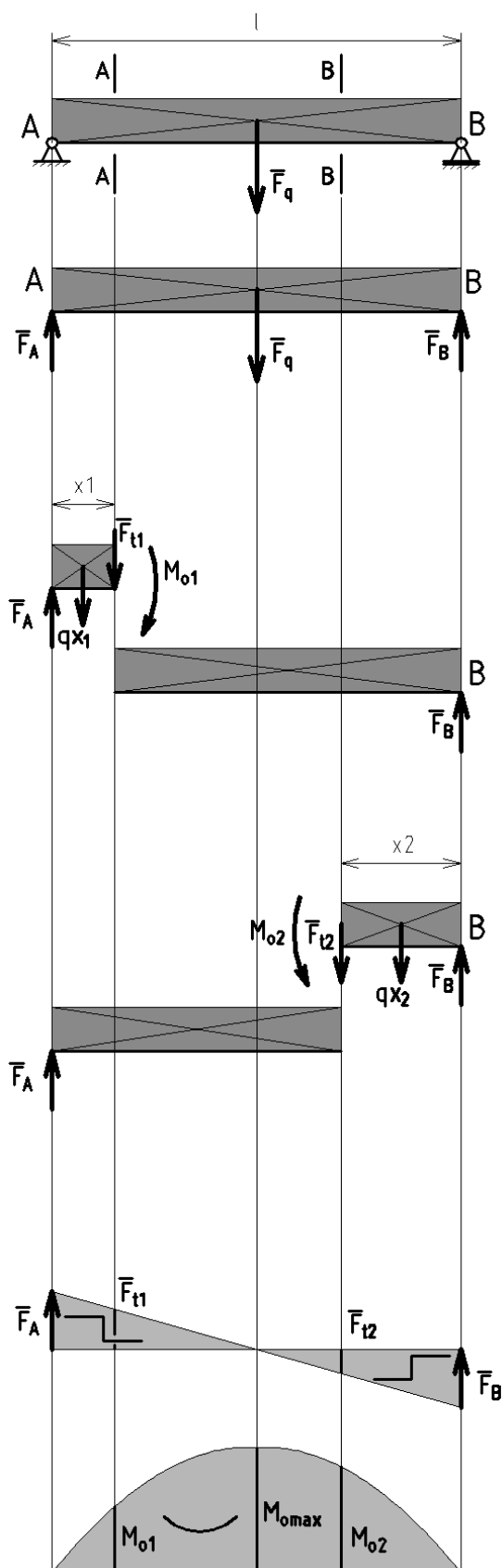
---

**Maximální ohybový moment je u tohoto nosníku ve vetknutí, kdy  $x = l$ :**

$$M_{o\max} = \frac{ql^2}{2} = M_A.$$


---

**Vnitřní statické účinky u nosníku na dvou podporách s rovnoměrně rozloženým spojitým zatížením:**



a) Schéma zatížení. Zatížení na jednotku délky  $q$  ( $\text{Nm}^{-1}$ ), výsledná síla  $F_q = ql$ .

b) Uvolnění nosníku, řešení vazbových účinků – podmínky rovnováhy:

$$F_q \cdot \frac{l}{2} - F_B \cdot l = 0, \quad F_B = \frac{1}{2} F_q = \frac{ql}{2},$$

$$F_q \cdot \frac{l}{2} - F_A \cdot l = 0, \quad F_A = \frac{1}{2} F_q = \frac{ql}{2}.$$

c) Myšlený řez v obecném místě, vnitřní statické účinky:

zleva:

$$F_A - qx_1 - F_{t1} = 0, \quad F_{t1} = \frac{ql}{2} - qx_1,$$

$$M_{o1} + F_A x_1 - qx_1 \frac{x_1}{2} = 0, \quad M_{o1} = q \frac{x_1^2}{2} - F_A x_1.$$

zprava:

$$F_B - qx_2 - F_{t2} = 0, \quad F_{t2} = \frac{ql}{2} - qx_2,$$

$$M_{o2} + F_B x_2 - qx_2 \frac{x_2}{2} = 0, \quad M_{o2} = q \frac{x_2^2}{2} - F_B x_2.$$

d) Průběh posouvající síly: posouvající síla zleva klesá k nule (v místě maximálního momentu), pak mění znaménko.

e) Průběh ohybového momentu: moment se mění podle paraboly, maxima nabývá v místě, kde posouvající síla mění znaménko (Schwedlerova věta).

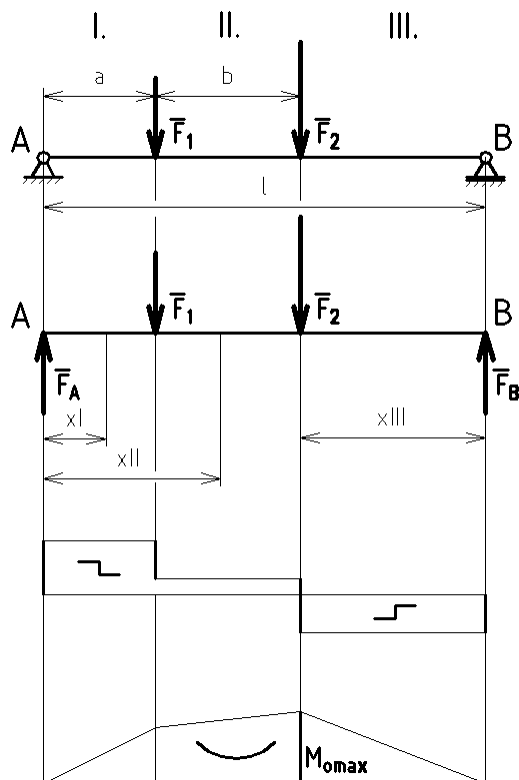
Obr. 73

**Maximální ohybový moment je u tohoto nosníku v polovině délky ( $x_1 = \frac{l}{2}$ ) a má velikost:**

$$M_{omax} = q \frac{l^2}{2} - F_A \frac{l}{2} = q \frac{l^2}{2} - q \frac{l^2}{4} = q \frac{l^2}{4}.$$

**Příklad:**

Nakreslete průběh posouvajících sil a ohybových momentů u nosníku zatíženého dvěma osamělými silami o velikostech  $F_1 = 5 \text{ kN}$ ,  $F_2 = 7 \text{ kN}$ ,  $a = 0,2 \text{ m}$ ,  $b = 0,3 \text{ m}$ ,  $l = 0,9 \text{ m}$ .



**Řešení:**

Podmínky rovnováhy a vazbové síly:

$$\sum F_{iy} = 0: F_A - F_1 - F_2 + F_B = 0,$$

$$\sum M_{iA} = 0: F_1 a + F_2 (a + b) - F_B l = 0.$$

$$F_B = \frac{F_1 a + F_2 (a + b)}{l} = \frac{5 \text{ kN} \cdot 0,2 \text{ m} + 7 \text{ kN} \cdot 0,5 \text{ m}}{0,9 \text{ m}} = \underline{5 \text{ kN}},$$

$$F_A = F_1 + F_2 - F_B = 5 \text{ kN} + 7 \text{ kN} - 5 \text{ kN} = \underline{7 \text{ kN}}.$$

Nosník rozdělíme na úseky oddělené jednotlivými zatíženími a v těchto úsecích řešíme posouvající síly a ohybové momenty.

Úsek I. (zleva):  $F_{tI} = F_A$ ;  $M_{oI} = F_A x_I$ .

Obr. 74

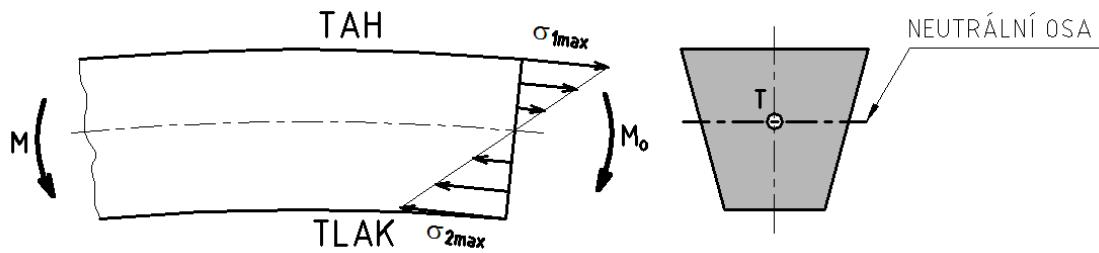
Úsek II. (zleva):  $F_{tII} = F_A - F_1$ ;  $M_{oII} = F_A x_{II} - F_1 (x_{II} - a)$ .

Úsek III. (zprava):  $F_{tIII} = F_B$ ;  $M_{oIII} = F_B x_{III}$ .

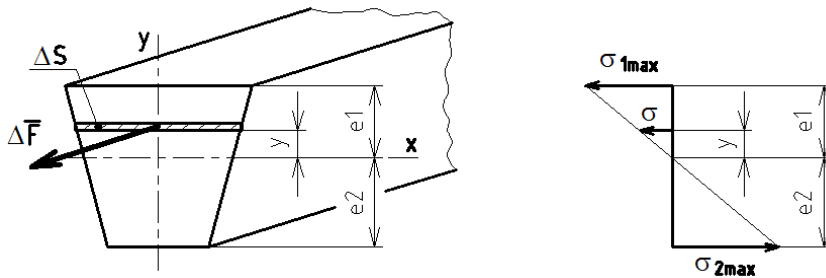
Maximální ohybový moment:  $M_{omax} = F_B \cdot [l - (a + b)] = 5 \text{ kN} \cdot [0,9 \text{ m} - (0,2 \text{ m} + 0,3 \text{ m})] = \underline{2 \text{ (kNm)}}$ .

**🔊) Ohybové napětí a pevnostní rovnice**

Namáhání na ohyb způsobuje **silová dvojice**, která působí v rovině kolmé k průřezu. Momentu vnějších sil **M** vzdoruje moment vnitřních sil **M<sub>o</sub>** a v průřezích součásti vzniká **normálové (tahové nebo tlakové) napětí**. Největší napětí jsou v krajních vláknech průřezu, v neutrální ose průřezu (prochází jeho těžištěm) je nulové. Velikost napětí se u materiálů, pro něž platí Hookův zákon, mění podle přímky. Ohýbaný prut se deformuje tak, že osa prutu přechází v **ohybovou čáru**.



Obr. 75



Obr. 76

$$\frac{\sigma}{\sigma_{max}} = \frac{y}{e}, \quad \sigma = \sigma_{max} \cdot \frac{y}{e}.$$

Elementární moment vnitřních sil:

$$\Delta M_o = \Delta F \cdot y = \sigma \cdot \Delta S \cdot y = \sigma_{max} \cdot \frac{y}{e} \cdot \Delta S \cdot y,$$

po úpravě:

$$\Delta M_o = \sigma_{max} \cdot \frac{\Delta S \cdot y^2}{e}.$$

Výsledný moment je dán součtem všech elementárních momentů<sup>1</sup>:

$$M_o = \sum \Delta M_o = \sigma_{max} \cdot \frac{\sum \Delta S \cdot y^2}{e}.$$

**Vztah  $\sum \Delta S \cdot y^2$  se nazývá kvadratický moment plochy k ose  $x$  (také moment setrvačnosti plochy). Označuje se  $J_x$  a udává se v  $\text{cm}^4$  nebo v  $\text{mm}^4$ . Závisí na velikosti a rozložení (tvaru) plochy.**

**Vztah  $\frac{\sum \Delta S \cdot y^2}{e}$  se nazývá průřezový modul v krutu k ose  $x$  (poměr kvadratického momentu k neutrální ose a vzdálenosti krajního vlákna od neutrální osy průřezu). Označuje se  $W_{ox1,2}$  a udává se v  $\text{cm}^3$  nebo v  $\text{mm}^3$ .**

**S těmito veličinami pak můžeme pevnostní rovnici v ohybu zapsat takto:**

$$\sigma_{o max} = \frac{M_o}{W_o} \leq \sigma_{Do}.$$

<sup>1</sup> Se znalostí práce s nekonečně malými veličinami bychom rovnicí odvodili za použití integrálu:

$$M_o = \sigma_{max} \cdot \frac{\int \Delta S \cdot y^2}{e}.$$

Kvadratické momenty a průřezové moduly můžeme počítat k ose  $x$  i k ose  $y$ . Záleží na tom, kolem které osy se průřez ohýbaného prutu natáčí. Obecně můžeme určit **dva průřezové moduly k jedné ose**, a tím dvě hodnoty napětí (různé vzdálenosti  $e_1$  a  $e_2$  u nesymetrického průřezu).



Provedeme-li pokus s pravítkem, které se pokusíme ohnout ve dvou rovinách, zjistíme velký rozdíl. Tak se projevují různé kvadratické momenty  $J_x$  a  $J_y$ .

### Průřezové charakteristiky pro ohyb

Průřez	Kvadratický moment	Průřezový modul
	$J_x = J_y = \frac{\pi D^4}{64},$ <p>zjednodušeně <math>J_{x,y} = 0,05D^4</math></p>	$W_{x,y} = \frac{\pi D^3}{32},$ <p>zjednodušeně <math>W_{x,y} = 0,1D^3</math></p>
	$J_{x,y} = \frac{\pi}{64} \cdot (D^4 - d^4),$ <p><math>J_{x,y} = 0,05(D^4 - d^4)</math></p>	$W_{x,y} = \frac{\pi}{32} \cdot \frac{D^4 - d^4}{D},$ <p><math>W_{x,y} = 0,1 \cdot \frac{D^4 - d^4}{D}</math></p>
	$J_x = \frac{bh^3}{12},$ $J_y = \frac{b^3h}{12}$	$W_{ox1,2} = \frac{bh^2}{6},$ $W_{oy1,2} = \frac{b^2h}{6}$

**Další charakteristiky naleznete ve strojnických tabulkách.** Tam jsou rovněž uvedeny hodnoty pro profily normalizovaných válcovaných tyčí (U, I atd.).

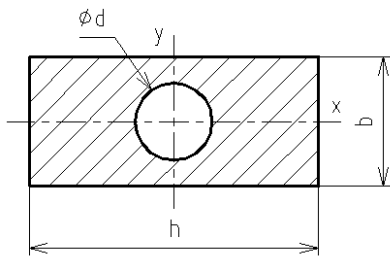


Při odvozování vztahů pro složené plochy je třeba mít na paměti, že kvadratické momenty lze sčítat a odčítat, protože tyto hodnoty vznikly jako součet (integrál). Průřezové moduly je nutno počítat z definice (poměr kvadratického momentu a vzdálenosti krajního vlákna od neutrální osy průřezu).

Obr. 77

#### Příklad:

Vypočítejte kvadratické momenty a průřezové moduly k oběma souřadným osám.  $h = 80$  mm,  $b = 50$ ,  $d = 30$  mm.



**Řešení:**

Protože se jedná o složenou plochu, rozložíme ji nejprve na plochy základní (plný obdélník a kruh) a jejich kvadratické momenty odečteme:

Obr. 78

$$J_{x1} = \frac{b^3 h}{12} = \frac{50^3 \text{ mm}^3 \cdot 80 \text{ mm}}{12} = 833\,333,3 \text{ (mm}^4\text{)},$$

$$J_{x2} = \frac{\pi d^4}{64} = \frac{\pi \cdot 30^4 \text{ mm}^4}{64} = 39\,760,8 \text{ (mm}^4\text{)},$$

$$J_x = J_{x1} - J_{x2} = 833\,333,3 \text{ mm}^4 - 39\,760,8 \text{ mm}^4 = \underline{793\,572,5 \text{ (mm}^4\text{)}}.$$

$$J_{y1} = \frac{bh^3}{12} = \frac{50 \text{ mm} \cdot 80^3 \text{ mm}^3}{12} = 2\,133\,333,3 \text{ (mm}^4\text{)}, \quad J_{y2} = J_{x2},$$

$$J_y = J_{y1} - J_{y2} = 2\,133\,333,3 \text{ mm}^4 - 39\,760,8 \text{ mm}^4 = \underline{2\,093\,572,5 \text{ (mm}^4\text{)}}.$$

Průřezové moduly:

$$W_{ox1,2} = \frac{J_x}{\frac{b}{2}} = \frac{793\,572,5 \text{ mm}^3}{25 \text{ mm}} = \underline{31\,742,9 \text{ (mm}^3\text{)}},$$

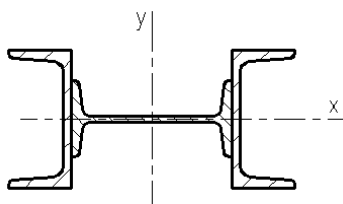
$$W_{oy1,2} = \frac{J_y}{\frac{h}{2}} = \frac{2\,093\,572,5 \text{ mm}^3}{40 \text{ mm}} = \underline{52\,339,3 \text{ (mm}^3\text{)}},$$

**Příklad:**

Vypočítejte kvadratický moment a průřezový modul k ose x složeného průřezu: I 140, 2 x U 120.

**Řešení:**

V tabulkách vyhledáme příslušné průřezové hodnoty profilů; pozor na orientaci os (naše osa x je pro profil I v tabulkách osou y).



Obr. 79

Pro I 140 je tedy kvadratický moment:  $J_{x1} = 35,2 \text{ (cm}^4\text{)}$ .

Pro U 120 je kvadratický moment  $J_{x2} = 364 \text{ (cm}^4\text{)}$ .

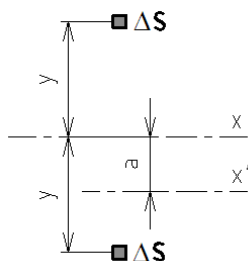
Výsledný kvadratický moment:  $J_x = J_{x1} + 2J_{x2} = 35,2 \text{ cm}^4 + 364 \text{ cm}^4 = \underline{399,2 \text{ (cm}^4\text{)}}.$



K ose y však kvadratický moment plochy v tomto případě počítat nemůžeme, protože neznáme kvadratický moment profilu U k dané ose y. Základní vztahy a tabulkové hodnoty se totiž vztahují k osám procházejícím těžištěm průřezů.

**Kvadratický moment k ose neprocházející těžištěm, Steinerova věta:**

Představme si, že průřez je tvořen dvěma malými ploškami o obsahu  $\Delta S$  a máme za úkol vypočítat kvadratický moment k dané ose  $x'$ :



$$\begin{aligned}
 J_{x'} &= \Delta S(y+a)^2 + \Delta S(y-a)^2 = \\
 &= \Delta S(y^2 + 2ya + a^2) + \Delta S(y^2 - 2ya + a^2) = \\
 &= 2\Delta S y^2 + 2\Delta S a^2,
 \end{aligned}$$

$$\text{obecně } J_{x'} = \sum \Delta S y^2 + \sum \Delta S a^2.$$

Obr. 80

Tento vztah se nazývá Steinerova věta<sup>1</sup> a můžeme jej zapsat jako:  $J_{x'} = J_{xT} + S a^2$ .

---

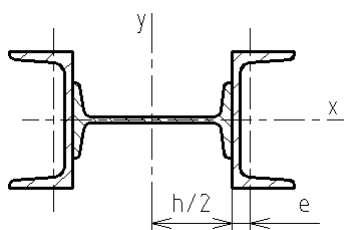
**Steinerova věta: Kvadratický moment plochy k ose neprocházející těžištěm vypočítáme, když ke kvadratickému momentu k ose, která těžištěm prochází, přičteme součin obsahu plochy a druhé mocniny vzdálenosti obou os.**

---

**Příklad:**

Vypočítejte kvadratický moment složeného průřezu z minulé úlohy k ose y.

**Řešení:**



$$I\ 140: J_{y1} = 573(\text{cm}^4).$$

$$\begin{aligned}
 U\ 120: J_{y2} &= J_{yT} + S \left( \frac{h}{2} + e \right)^2 = 43,2 \text{ cm}^4 + 17 \text{ cm}^2 \cdot \\
 &\cdot \left( \frac{12}{2} \text{ cm} + 3,9 \text{ cm} \right)^2 = 1\ 709,4 (\text{cm}^4).
 \end{aligned}$$

Obr. 81

Výsledný kvadratický moment:  $J_y = J_{y1} + 2J_{y2} = 573 \text{ cm}^4 + 2 \cdot 1\ 709,4 \text{ cm}^4 = \underline{3\ 992 (\text{cm}^4)}$ .

**Deformace při ohybu**

Výpočet deformace při ohybu je poměrně složitou záležitostí, proto probereme jen nejjednodušší případy. Odvození výpočtových vztahů v této verzi učebního textu nebude provedeno.

---

**Deformace je charakterizována ohybovou čarou, což je původně přímá osa nosníku, která přejde při ohybu v křivku. Hodnotami, kterými velikost deformace vyjadřujeme, jsou poloměr křivosti  $\rho$  ohybové čáry v daném místě, úhel sklonu tečny k ohybové čáře  $\alpha$  a velikost posunutí nosníku v daném místě, neboli průhyb  $y$ .**

---

Poloměr křivosti ohybové čáry:

$$\rho = \frac{E \cdot J}{M}.$$

<sup>1</sup> Podle švýcarského matematika Jakoba Steinera (1796-1863).





**Otázka:**

Jaký tvar má ohybová čára vetknutého nosníku zatíženého silovou dvojicí působící na volném konci nosníku (čistý ohyb)?

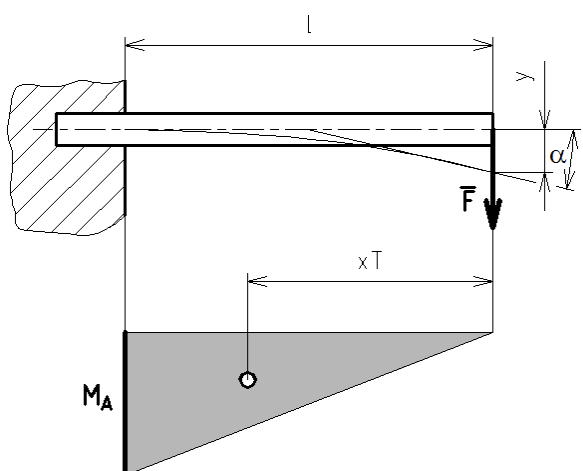
Běžně používaný způsob výpočtu úhlu sklonu tečny k ohybové čáře (tzv. úhlu natočení) a průhybu **metodou momentových ploch** ukážeme na nejjednodušších nosnících, kdy lze vycházet z vetknutého nosníku.

Úhel sklonu tečny k ohybové čáře (úhel natočení) vypočítáme, když obsah momentové plochy  $S_M$  dělíme tuhostí v ohybu  $EJ$ :

$$\alpha = \frac{S_M}{EJ} \text{ (rad).}$$

Průhyb vypočítáme, když statický moment momentové plochy  $S_{M \cdot x_T}$  k místu průhybu dělíme tuhostí v ohybu  $EJ$ :

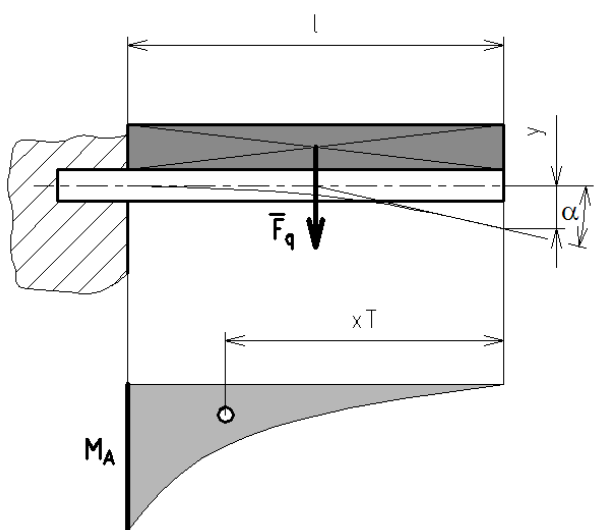
$$y = \frac{S_{M \cdot x_T}}{EJ} \text{ (mm).}$$



$$\alpha = \frac{S_M}{EJ} = \frac{1}{EJ} \cdot \frac{1}{2} M_A \cdot l = \frac{1}{EJ} \cdot \frac{1}{2} \cdot Fl \cdot l = \underline{\underline{\frac{Fl^2}{2EJ}}}$$

$$y = \frac{S_{M \cdot x_T}}{EJ} = \frac{Fl^2}{2EJ} \cdot \frac{2}{3} l = \underline{\underline{\frac{Fl^3}{3EJ}}}$$

Obr. 82

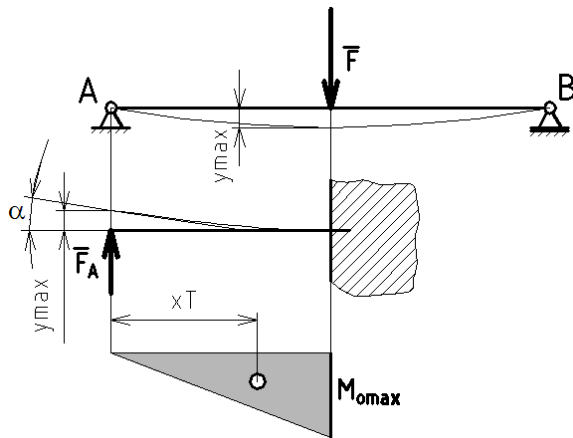


$$\alpha = \frac{S_M}{EJ} = \frac{1}{EJ} \cdot \frac{1}{3} M_A \cdot l = \frac{1}{EJ} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{ql^2}{2} \cdot l = \underline{\underline{\frac{ql^3}{6EJ}}}$$

$$y = \frac{S_{M \cdot x_T}}{EJ} = \frac{ql^3}{6EJ} \cdot \frac{3}{4} l = \underline{\underline{\frac{ql^4}{8EJ}}}$$

Obr. 83

Nosník na dvou podporách zatížený symetricky lze uprostřed rozdělit na dva **vetknuté nosníky** zatížené vazbovými a dalšími silami.



Vycházíme z poznatku, že uprostřed symetricky zatíženého nosníku je úhel natočení roven 0, situace tedy odpovídá vetknutí.

Maximální moment:

$$M_{omax} = F_A \cdot \frac{l}{2} = \frac{F}{2} \cdot \frac{l}{2} = \frac{Fl}{4}$$

Obsah momentové plochy:

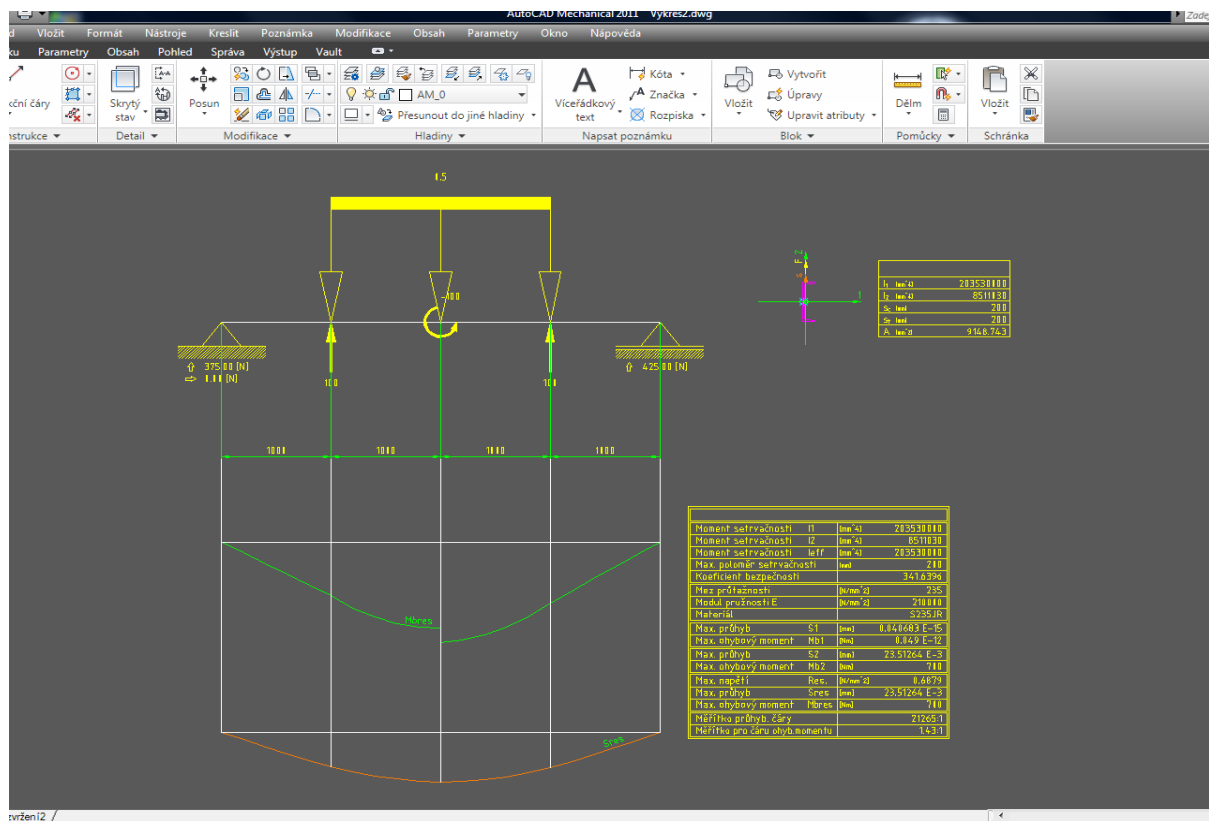
$$S_M = \frac{1}{2} \cdot M_{omax} \cdot \frac{l}{2} = \frac{Fl^2}{16}$$

Obr. 84

Úhel natočení a průhyb:

$$\alpha = \frac{S_M}{EJ} = \frac{Fl^2}{16EJ}; \quad y = \frac{S_M x_T}{EJ} = \frac{Fl^2}{16EJ} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{l}{2} = \frac{Fl^3}{48EJ}$$

### Řešení nosníků v programu AutoCAD Mechanical (ukázky vytvořeny ve verzi 2011):

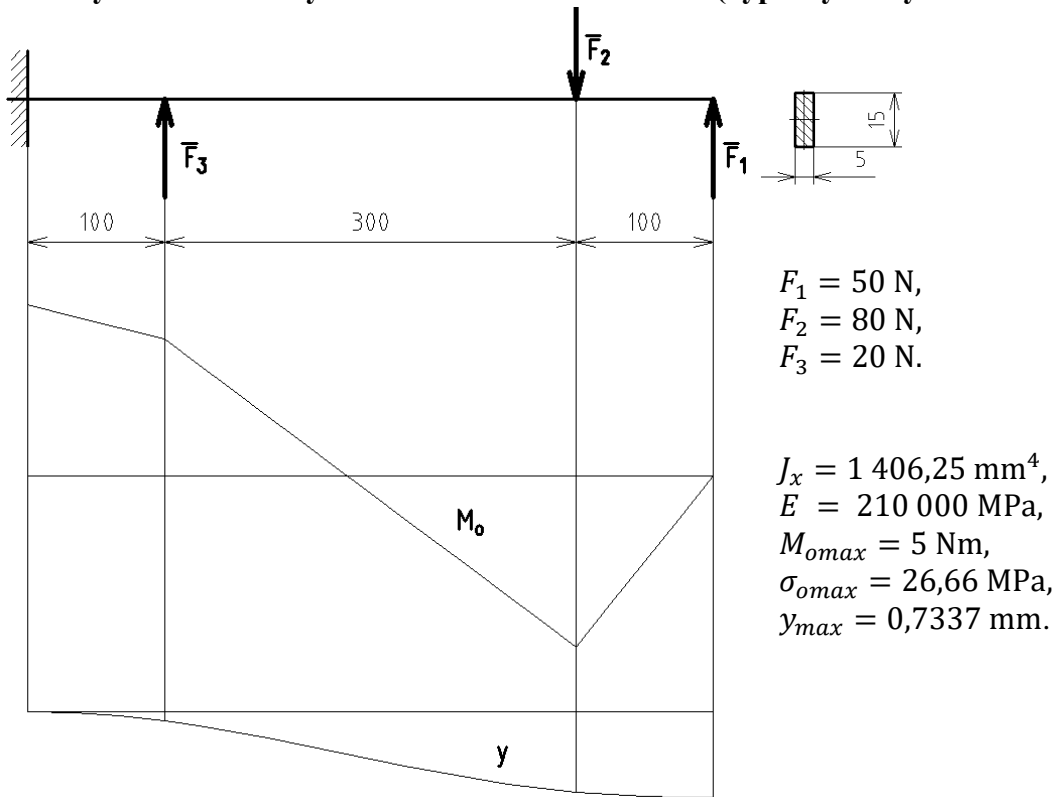


Obr. 85

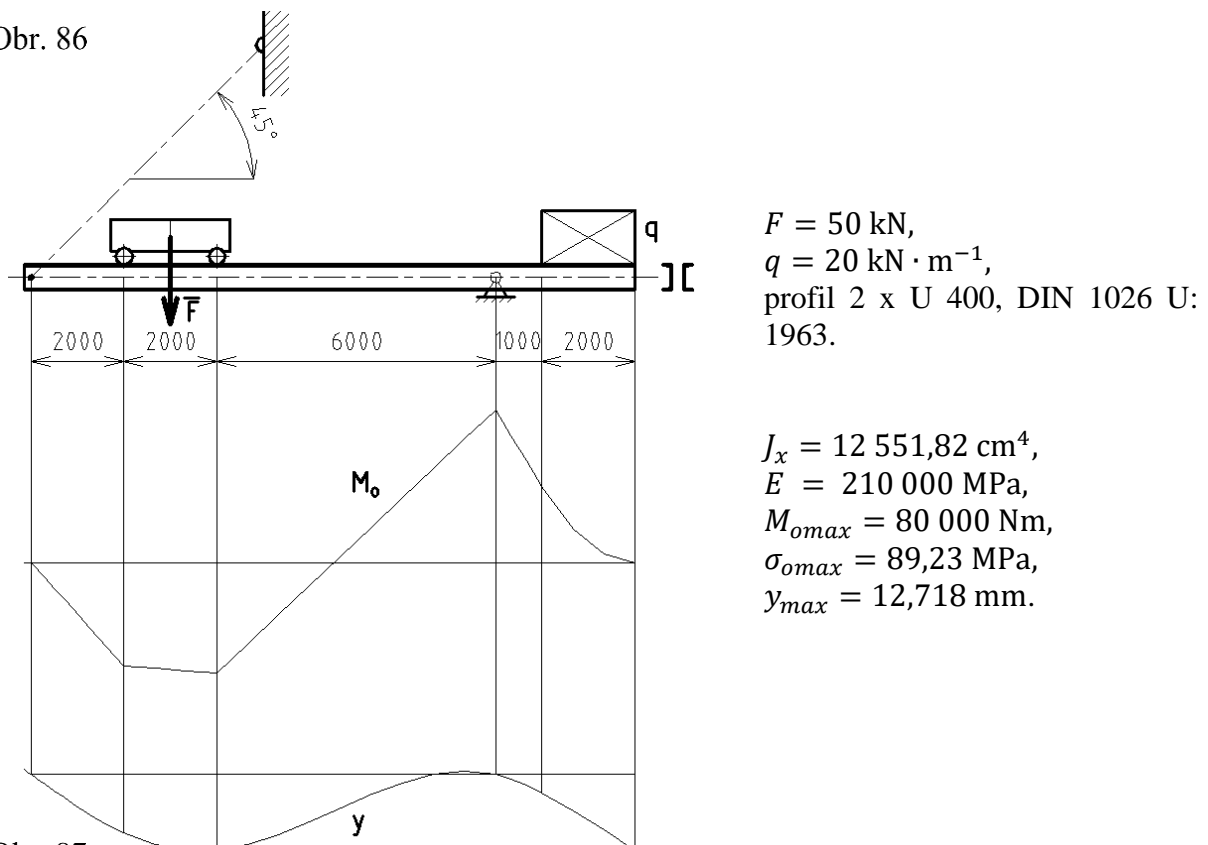
Modul programu AutoCAD Mechanical (karta Obsah, skupina Výpočty) umožňuje řešit mimo jiné i průběhy momentů a ohybových čar nosníků. Nejprve je nutno definovat **průřez nosníku**

– program vypočítá především kvadratické momenty, poté určíme jednotlivé **podpory a zatížení** a výsledkem výpočtu je **průběh momentu a vykreslení ohybové čáry nosníku**. Ve výsledcích výpočtu jsou i **vazbové síly a momenty, maximální napětí, průhyb** aj.

**Ukázky nosníků řešených v AutoCADu Mechanical (výpis vybraných hodnot):**



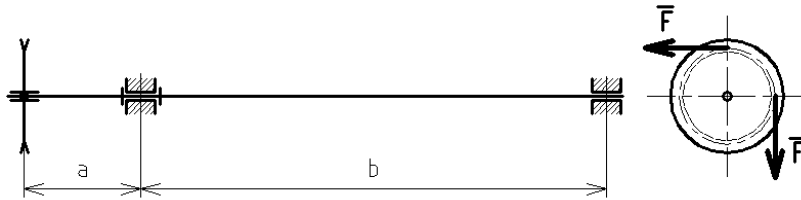
Obr. 86



Obr. 87

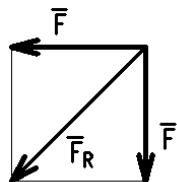
**Příklad:**

Navrhněte průměr hřídele vodící kladky z oceli 11 500. Hřídel je zatížen dvěma silami o velikosti  $F = 2\,000\text{ N}$ , které působí ve větvích lana. Rozměry  $a = 150\text{ mm}$ ,  $b = 600\text{ mm}$ . Bezpečnost  $k = 2$ , střídavé namáhání.



Obr. 88

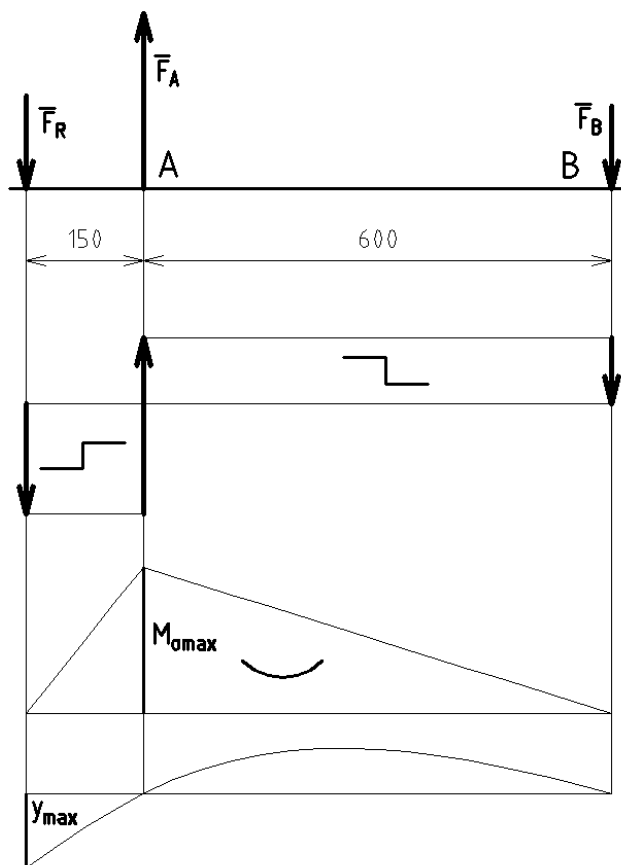
**Řešení:**



Hřídel je namáhán výslednicí sil, jejíž velikost je (úhlopříčka čtverce):

$$F_R = F \cdot \sqrt{2} = 2\,000 \cdot \sqrt{2} = \underline{2\,828,4\text{ (N)}}$$

Obr. 89



Obr. 90

Vazbové síly – nosník na dvou podporách:

$$\sum M_{iA} = 0:$$

$$F_R \cdot a - F_B \cdot b = 0; F_B = F_R \cdot \frac{a}{b} = 2\,828,4\text{ N} \cdot \frac{150\text{ mm}}{600\text{ mm}} = 707,1\text{ (N)},$$

$$\sum F_{iy} = 0:$$

$$F_R - F_A + F_B = 0; F_A = F_R + F_B = 2\,828,4\text{ N} + 707,1\text{ N} = 3\,535,5\text{ (N)}.$$

$$M_{omax} = F_R \cdot a = 2\,828,4\text{ N} \cdot 150\text{ mm} = 424\,260\text{ (Nmm)}.$$

Pevnostní rovnice, dovolené napětí:

$$\sigma_o = \frac{M_o}{W_o} \leq \sigma_{Do}; \sigma_{Do} = \frac{Re}{k} c_{III} = \frac{300\text{ MPa}}{2} \cdot 0,65 = 97,5\text{ (MPa)}.$$

Výpočet průměru:

$$W_o = \frac{M_o}{\sigma_{Do}} = \frac{424\,260 \text{ Nmm}}{97,5 \text{ MPa}} = 4\,351,4 \text{ (mm}^3\text{)}; d = \sqrt[3]{\frac{32W_o}{\pi}} = \sqrt[3]{\frac{32 \cdot 4\,351,4 \text{ mm}^3}{\pi}} = \underline{36 \text{ (mm)}}.$$

Ohybová čára je pouze naznačena, maximální průhyb určen pomocí modulu AutoCADu 2011 ( $y_{max} = 0,92 \text{ mm}$ ).

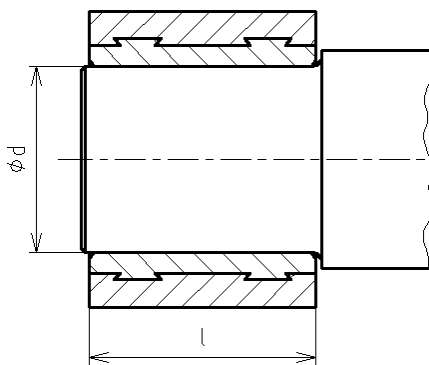
**Příklad:**

Proveďte kontrolu čepu na ohyb a kluzného ložiska na otlačení a vypočtěte maximální průhyb čepu. Průměr čepu  $d = 40 \text{ mm}$ , délka  $l = 50 \text{ mm}$ . Výslednice spojitěho zatížení čepu má velikost  $F = 5 \text{ kN}$ . Dovolené napětí v ohybu je  $\sigma_{Do} = 20 \text{ MPa}$ , dovolený tlak je  $p_D = 5 \text{ MPa}$ .

**Řešení:**

Výpočtovým modelem pro čep bude vetknutý nosník s rovnoměrně rozloženým spojitým zatížením. Jeho velikost na jednotku délky je

$$q = \frac{F_q}{l} = \frac{5\,000 \text{ N}}{50 \text{ mm}} = 100 \text{ (Nmm}^{-1}\text{)}.$$



Vazbová síla a moment:

$$F_A = F_q; M_A = F_q \frac{l}{2} = 5\,000 \text{ N} \cdot 25 \text{ mm} = 125\,000 \text{ (Nmm)}.$$

Maximální ohybový moment:  $M_{omax} = 125\,000 \text{ Nmm}$ .

Průřezový modul:

$$W_o = 0,1d^3 = 0,1 \cdot 40^3 = 6\,400 \text{ (mm}^3\text{)}.$$

Ohybové napětí:

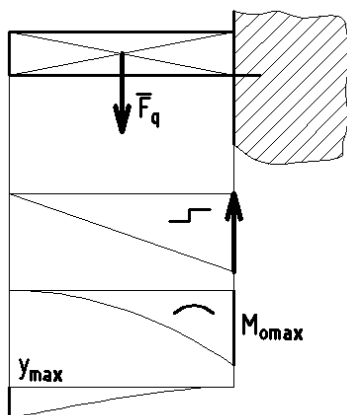
$$\sigma_o = \frac{M_o}{W_o} = \frac{125\,000 \text{ Nmm}}{6\,400 \text{ mm}^3} = \underline{19,5 \text{ (MPa)}}$$

Ohybové napětí vyhovuje.

Kontrola na otlačení:

$$p = \frac{F}{S} = \frac{F}{dl} = \frac{5\,000 \text{ N}}{40 \text{ mm} \cdot 50 \text{ mm}} = \underline{2,5 \text{ (MPa)}}.$$

Měrný tlak je menší než dovolený.



Obr. 91

Maximální průhyb:

$$y_{max} = \frac{S_{MxT}}{EJ} = \frac{ql^3}{6EJ} \cdot \frac{3}{4}l = \frac{ql^4}{8EJ} = \frac{100 \text{ Nmm}^{-1} \cdot 50^4 \text{ mm}^4}{8 \cdot 2,1 \cdot 10^5 \text{ MPa} \cdot 125 \, 663,7 \text{ mm}^4} = \underline{0,003 \text{ (mm)}}.$$

$$J = \frac{\pi d^4}{64} = \frac{\pi \cdot 40^4}{64} = 125 \, 663,7 \text{ (mm}^4\text{)}.$$

### Složené zatížení – metoda superpozice

**Metoda superpozice (skládání účinků) umožňuje rozložit kombinované zatížení nosníku na zatížení jednoduchá a výsledek obdržet složením dílčích výsledků.**

#### **Příklad:**

Vetknutý nosník je zatížen osamělou silou a ohybovým momentem. Vypočítejte maximální napětí, úhel natočení a průhyb na konci nosníku. Nosník má eliptický průřez s délkami os  $h = 120 \text{ mm}$ ,  $b = 60 \text{ mm}$ , je zatížen silou o velikosti  $F = 2 \, 000 \text{ N}$  a momentem o velikosti  $M = 5 \, 000 \text{ Nm}$ .

#### **Řešení metodou superpozice:**

Jednotlivé momentové obrazce a ohybové čáry se postupně vztahují k zatížení nosníku silou  $F$ , momentem  $M$  a celkovému zatížení:

$$M_o = M_{o1} + M_{o2},$$

$$y = y_1 + y_2.$$

Vazbová síla:

$$F - F_A = 0; F_A = F = 2 \, 000 \text{ (N)},$$

vazbový moment:

$$M_A - M + F \cdot (l_1 + l_2) = 0; M_A = M - F \cdot (l_1 + l_2) = 5 \, 000 \text{ Nm} - 2 \, 000 \text{ N} \cdot 1 \text{ m} = 3 \, 000 \text{ (Nm)}.$$

Maximální ohybový moment:

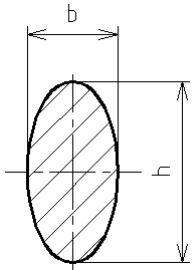
$$M_{omax} = M - F \cdot l_1 = 5 \, 000 \text{ Nm} - 2 \, 000 \cdot 0,6 \text{ m} = 3 \, 800 \text{ (Nm)}.$$

Napětí v ohybu:

$$\sigma_o = \frac{M_{omax}}{W_o} = \frac{M_{omax}}{\frac{\pi}{32}bh^2} = \frac{3 \, 800 \cdot 10^3 \text{ Nmm}}{\frac{\pi}{32} \cdot 60 \cdot 120^2 \text{ mm}^3} = \underline{44,8 \text{ (MPa)}}.$$

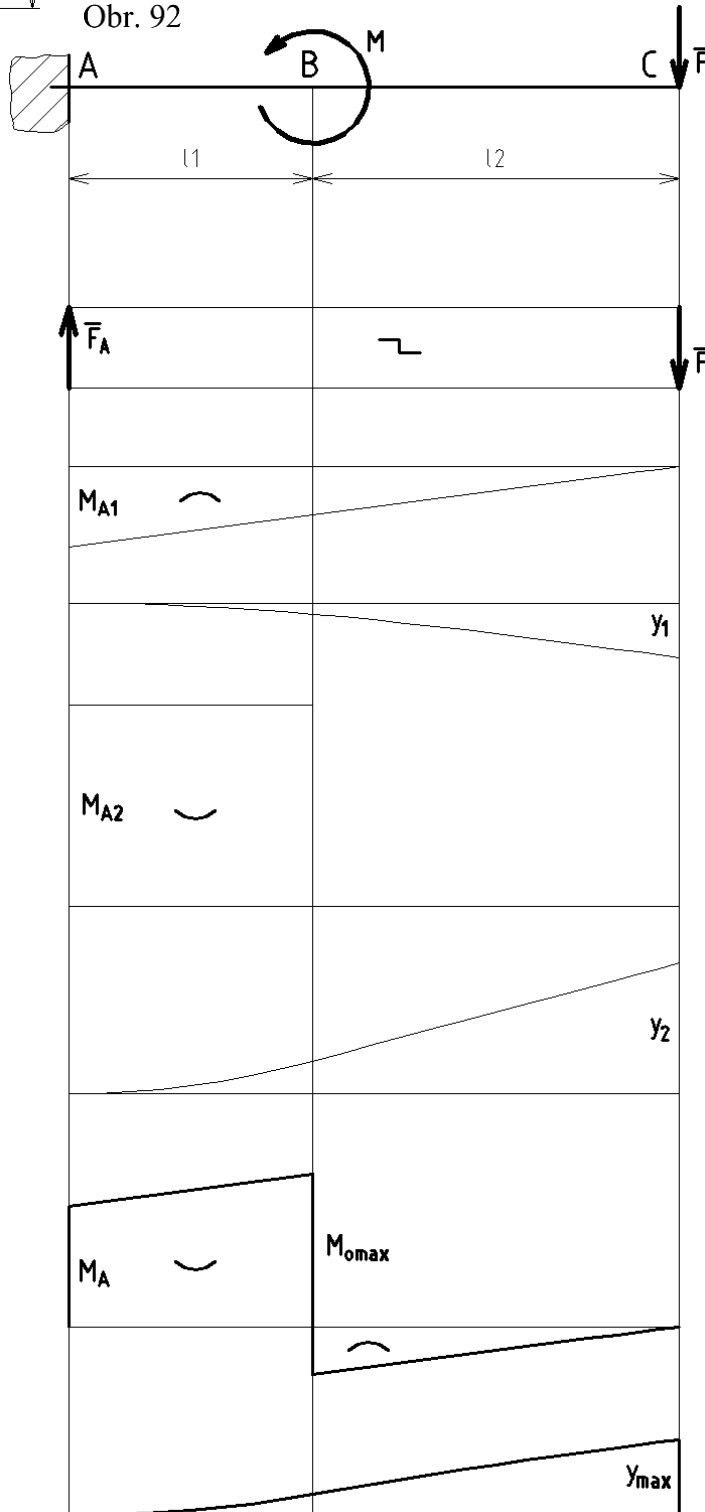
Úhel natočení:

$$\begin{aligned} \alpha &= \alpha_1 + \alpha_2 = \frac{S_{M1}}{EJ} + \left(-\frac{S_{M2}}{EJ}\right) = \frac{Fl^2}{2EJ} - \frac{Ml_2}{EJ} = \\ &= \frac{1}{2,1 \cdot 10^5 \text{ MPa} \cdot 5 \, 089 \, 380,1 \text{ mm}^4} \cdot \left(\frac{2 \, 000 \text{ N} \cdot 1 \, 000^2 \text{ mm}^2}{2} - 5 \, 000 \text{ Nm} \cdot 400 \text{ mm}\right) = \\ &= \underline{9,338 \cdot 10^{-4} \text{ (rad)}}. \end{aligned}$$



$$J_x = \frac{\pi}{64}bh^3 = \frac{\pi}{64} \cdot 60 \cdot 120^3 = 5\,089\,380,1 \text{ (mm}^4\text{)}.$$

Obr. 92



Obr. 93

Průhyb na konci:

$$\begin{aligned}y &= y_1 + y_2 = \frac{S_{M1} \cdot x_{T1}}{EJ} + \left( -\frac{S_{M2} \cdot x_{T2}}{EJ} \right) = \frac{Fl^2 \cdot \frac{2}{3}l}{2EJ} - \frac{Ml_2 \left( l_1 + \frac{l_2}{2} \right)}{EJ} = \\&= \frac{1}{EJ} \cdot \left( \frac{Fl^3}{3} - Ml_2 \left( l_1 + \frac{l_2}{2} \right) \right) = \frac{1}{2,1 \cdot 10^5 \text{ MPa} \cdot 5\,089\,380,1 \text{ mm}^4} \cdot \\&\cdot \left( \frac{2\,000 \text{ N} \cdot 1\,000^3 \text{ mm}^3}{3} - 5\,000 \text{ Nm} \cdot 400 \text{ mm} \cdot 800 \text{ mm} \right) = \underline{\underline{-0,873 \text{ (mm)}}}.\end{aligned}$$

Záporné znaménko znamená, že výsledný průhyb je ve směru dílčího průhybu se shodným znaménkem, tj.  $y_2$ .



**Otázky:**

1. Jak se vypočítá ohybový moment v daném řezu nosníku?
2. Jak zní Steinerova věta?
3. Jaký tvar by měla momentová plocha nosníků zatížených vlastní tíhou?
4. Jak charakterizujete neutrální osu?



## 13. KOMBINOVANÉ NAMÁHÁNÍ

Obsah této kapitoly:

- Pojem kombinovaného namáhání, druhy kombinací
- Tah nebo tlak s ohybem
- Ohyb nebo tah a krut

### Pojem kombinovaného namáhání, druhy kombinací

V úlohách řešených doposud jsme se zabývali případy, kdy vnější síly způsobovaly v průřezu napětí normálová nebo tečná. Při rozboru namáhání ohybem jsme se však setkali s tím, že v průřezu mohou vznikat nejen normálové (tahové a tlakové) síly, ale též posouvající (smykové) síly a momenty (ohybové, ale obecně i krouticí). Tyto veličiny, charakterizující zatížení, namáhají těleso kombinovaným namáháním.

Při rozboru kombinovaných namáhání musíme rozlišit, o kterou ze základních kombinací se jedná:

- 
1. **Napětí sourodá: všechna napětí jsou normálová nebo tečná. Typickým příkladem je kombinace tlaku nebo tahu s ohybem.**
  2. **Napětí nesourodá: kombinace normálových a tečných napětí. Typickými příklady jsou tah s krutem nebo ohyb s krutem.**
- 

Podle toho, o kterou kombinaci se jedná, musíme zvolit výpočtovou metodu. V této kapitole se budeme zabývat nejtýpějšími kombinovanými namáháními.

### Tah nebo tlak s ohybem



---

Častým příkladem je tzv. **mimostředný (excentrický) tah nebo tlak**. Síla, zatěžující třmen svěrky, působí rovnoběžně s osou označeného průřezu (nikoli v ní) – viz schéma. V průřezu tak vzniká normálová síla (zde tahová) a ohybový moment.

---

Obr. 94

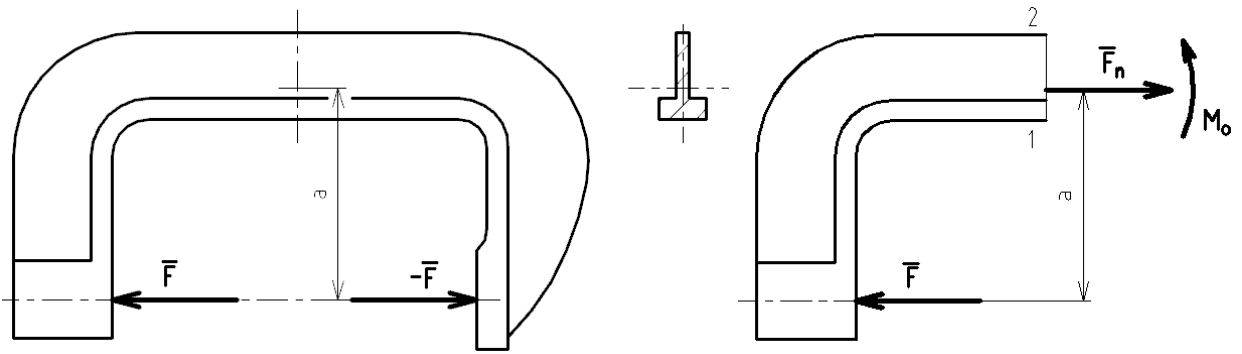
Součást rozdělíme myšleným řezem v místě, kde hledáme napětí, a oddělenou část uvedeme do rovnováhy vnitřními statickými účinky: silou  $F_n$  a momentem vnitřních sil  $M_o$ , jímž uvedeme do rovnováhy dvojici  $F - F_n$ . Síla  $F_n$  vyvolá tahové napětí, moment  $M_o$  ohybové.

---

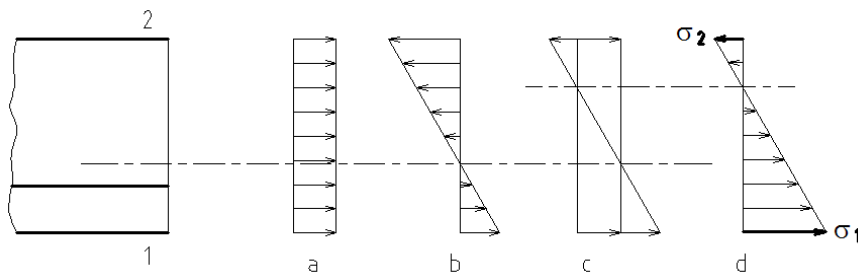
**Obě napětí jsou normálová, tedy sourodá, a můžeme je algebraicky sčítat. Tahová napětí budou kladná, tlaková záporná.**

---

V krajním vlákne 1 vzniká tahové napětí, jehož velikosti je dána součtem napětí od síly  $F$  a tahového napětí od ohybu. Ve vlákne 2 se skládá tahové napětí od síly  $F$  s tlakovým napětím od ohybu, a proto výsledné napětí může být tahové, tlakové a ve zvláštním případě i nulové. Neutrální osa se posune směrem k vláknu 2.



Obr. 95

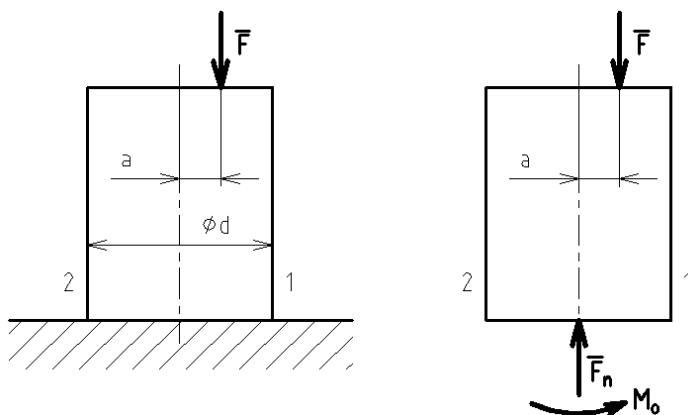


Napětí ve vlákne 1:  
 $\sigma_1 = \sigma_t + \sigma_{o1}$ ,  
 napětí ve vlákne 2:  $\sigma_2 = \sigma_t - \sigma_{o2}$ .

Obr. 96

**Příklad:**

Vypočítejte největší vzdálenost  $a$  od osy, v níž může ležet působíště síly  $F$ , aby v krajním vlákne 2 ještě nenastalo tahové namáhání.



Ve vlákne 1 se sčítá tlakové napětí od síly  $F$  s tlakovým napětím od ohybu:

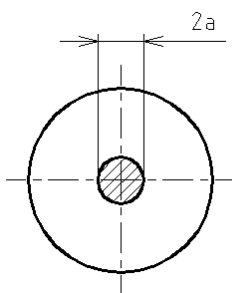
$$\sigma_1 = -\sigma_d + (-\sigma_{o1}).$$

Ve vlákne 2 se skládá tlakové napětí od síly  $F$  s tahovým napětím od ohybu:

$$\sigma_2 = -\sigma_d + \sigma_{o2}.$$

Obr. 97

V situaci, kdy napětí ve vlákne 2 bude rovno 0, bude síla  $F$  ležet v největší vzdálenosti od osy. Při jejím překročení už vznikne ve vlákne kladné tahové napětí (napětí od ohybu bude větší než tlakové napětí od síly  $F$ ):



$$-\sigma_d + \sigma_{o2} = 0; \quad -\frac{F}{S} + \frac{F \cdot a}{W_o} = 0.$$

Po dosazení a úpravě složených zlomků:

$$-\frac{4F}{\pi d^2} + \frac{32Fa}{\pi d^3} = 0; \quad \underline{a_{max} = \frac{1}{8}d}.$$

Obr. 98

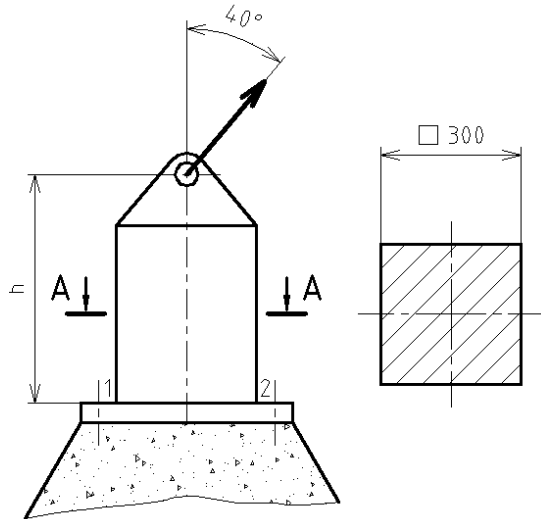
**Jestliže rameno  $a$  v jakémkoli směru nesmí překročit vzdálenost  $1/8$  průměru od osy, pak síla  $F$  musí při namáhání součásti kruhového průřezu ležet v kruhu o průměru  $1/4d$ . Těto ploše říkáme jádro průřezu. Jádro průřezu lze určit i pro jiné tvary.**



*Znalost jádra průřezu je důležitá v případě, kdy je nežádoucí, aby v průřezu vzniklo tahové napětí (křehké materiály).*

**Příklad:**

Sloupek je zatížen šikmou silou o velikosti  $F = 40$  kN. Výška  $h = 600$  mm. Vypočtete napětí ve vláknech 1 a 2.

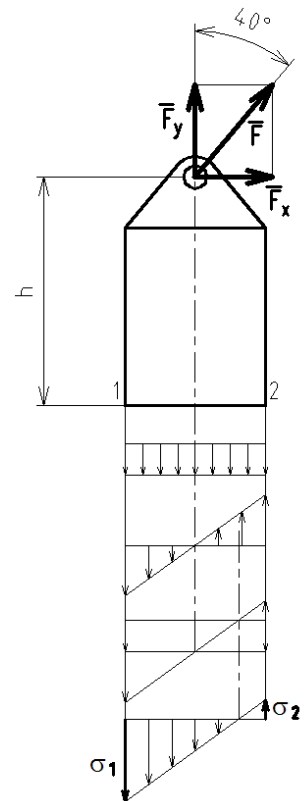


**Řešení:**

Sílu rozložíme do směrů souřadných os. Složka v ose  $x$  vyvodí ohybové namáhání (ve vlákne 1 tah, ve vlákne 2 tlak), složka v ose  $y$  vyvodí tahové namáhání.

$$\sigma_1 = \sigma_t + \sigma_{o1} = \frac{F_y}{S} + \frac{F_x h}{W_o},$$

$$\sigma_2 = \sigma_t - \sigma_{o2} = \frac{F_y}{S} - \frac{F_x h}{W_o}.$$



Obr. 99

Pomocné výpočty:

$$F_x = F \cdot \sin 40^\circ = 40\,000 \text{ N} \cdot \sin 40^\circ = 25\,711,5 \text{ (N)},$$

$$F_y = F \cdot \cos 40^\circ = 40\,000 \text{ N} \cdot \cos 40^\circ = 30\,641,8 \text{ (N)},$$

$$S = 300^2 \text{ mm}^2 = 90\,000 \text{ mm}^2,$$

$$W_o = \frac{a^3}{6} = \frac{300^3 \text{ mm}^3}{6} = 45 \cdot 10^5 \text{ (mm}^3\text{)}.$$

Napětí ve vlákne 1:

$$\sigma_1 = \frac{30\,641,8 \text{ N}}{90\,000 \text{ mm}^2} + \frac{25\,711,5 \text{ N} \cdot 600 \text{ mm}}{45 \cdot 10^5 \text{ mm}^3} = \underline{\underline{3,77 \text{ (MPa)}}}.$$

Napětí ve vlákne 2:

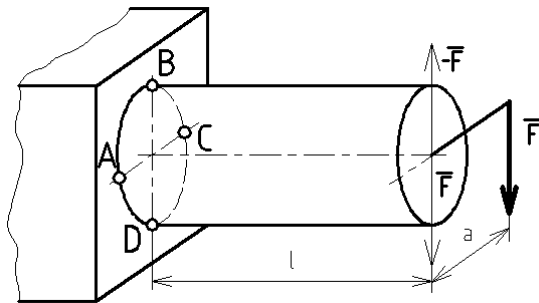
$$\sigma_2 = \frac{30\,641,8 \text{ N}}{90\,000 \text{ mm}^2} - \frac{25\,711,5 \text{ N} \cdot 600 \text{ mm}}{45 \cdot 10^5 \text{ mm}^3} = \underline{\underline{-3,09 \text{ (MPa)}}}.$$

Ve vlákne 2 bude tlakové napětí.

**))) Napětí složené z napětí normálového a tečného**

Typickým příkladem této kombinace nesourodých napětí je kombinace krutu a ohybem vyskytující se u hřídelů.

V krajních vláknech B, D jsou největší ohybová napětí způsobená momentem přeložené síly F (body A, C určují neutrální osu) a skládají se tu s maximálním napětím v krutu od



Obr. 100

silové dvojice F, -F. Vektory normálových a tečných napětí jsou různoběžné, takže je nelze algebraicky sčítat, ale skutečnému chování materiálů neodpovídá ani jednoduché skládání vektorové. Tyto případy popisují teorie (hypotézy) pevnosti, z nichž každá vyhovuje jiné skupině materiálů.

Výsledkem těchto teorií jsou vzorce pro konverzi dílčích napětí na tzv. redukovaná napětí.

**Redukované napětí (většinou normálové) má na materiál stejný účinek, jako obě dílčí napětí působící současně.**



Skutečné chování materiálů při zatížení je složitější, než jsme předpokládali v základní pružnosti a pevnosti. I při jednoosé napjatosti (prostý tah) jsme se setkali s tím, že v některých rovinách se ocelový vzorek porušil smykem. Na mezi kluzu vznikají tzv. Lüdersovy čáry (v rovinách maximálních smykových napětí pod úhlem 45 °) a na mezi pevnosti vzniká číškový lom. Při krutu součástí z materiálů s křehkým chováním (litina, ušlechtilé tepelně zpracované oceli) se součást zase poruší spíše tahem v šikmé rovině, než smykem v rovině průřezu.

**Pro houževnaté materiály vyhovuje nejlépe výpočet redukovaného napětí podle teorie HMM (iniciály autorů - Huber, von Mises a Hencky<sup>1</sup>):**

$$\sigma_{red} = \sqrt{\sigma^2 + 3\tau^2}.$$

V rovnici označuje  $\sigma_{red}$  zmíněné redukované napětí,  $\sigma$  je napětí normálové (ohyb, tah, tlak) a  $\tau$  je napětí v krutu.

mm

**Pevnostní rovnice má pak tvar:**

$$\sigma_{red} = \sqrt{\sigma^2 + 3\tau^2} \leq \sigma_D.$$

**Příklad:**

Ocelový hřídel o průměru  $d = 30$  mm na předchozím obrázku je zatížen silou o velikosti  $F = 1,2$  kN. Rameno  $a = 70$  mm, délka  $l = 150$  mm, dovolené napětí je  $\sigma_{D0} = 80$  MPa. Zkontrolujte hřídel.

<sup>1</sup> Maksymilian Tytus Huber (1872 - 1950): světově proslulý polský vědec a strojní inženýr. Na polských technických univerzitách vedl teoretický výzkum v oblasti klasické mechaniky a pružnosti a pevnosti.

Richard von Mises (1883 - 1953): rakouský matematik a fyzik. Patří mezi nejvýznamnější osobnosti aplikované matematiky 20. století.

Heinrich Hencky (1885 - 1951): německý inženýr působící v Německu, USA, Rusku a Holandsku.

**Řešení:**

Ohybové napětí:

$$\sigma_o = \frac{M_o}{W_o} = \frac{Fl}{0,1d^3} = \frac{1\,200\text{ N} \cdot 150\text{ mm}}{0,1 \cdot 30^3\text{ mm}^3} = 66,7\text{ (MPa)}.$$

Napětí v krutu:

$$\tau_k = \frac{M_k}{W_k} = \frac{Fa}{0,2d^3} = \frac{1\,200\text{ N} \cdot 70\text{ mm}}{0,2 \cdot 30^3\text{ mm}^3} = 15,6\text{ (MPa)}.$$

Redukované napětí:

$$\sigma_{red} = \sqrt{\sigma_o^2 + 3\tau_k^2} = \sqrt{66,7^2\text{ MPa}^2 + 3 \cdot 15,6^2\text{ MPa}^2} = \underline{72,0\text{ (MPa)}}.$$

Součást vyhovuje.

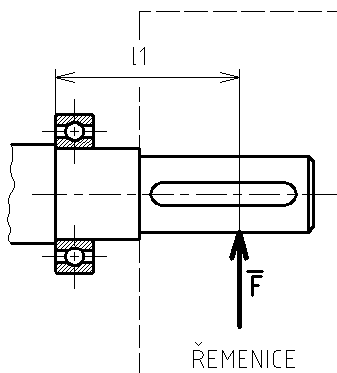
Uvedená rovnice pro redukované napětí je **rovnici kontrolní**. Pro případný návrhový výpočet hřídele kruhového průřezu rovnici upravíme tak, aby měla podobu pevnostní rovnice v ohybu. Využijeme rovnosti  $W_k = 2W_o$ .

$$\sigma_{red} = \sqrt{\sigma_o^2 + 3\tau_k^2} = \sqrt{\left(\frac{M_o}{W_o}\right)^2 + 3 \cdot \left(\frac{M_k}{W_k}\right)^2} = \sqrt{\left(\frac{M_o}{W_o}\right)^2 + 3 \cdot \left(\frac{M_k}{2W_o}\right)^2},$$

odtud

$$M_{ored} = \sqrt{M_o^2 + 0,75 \cdot M_k^2} \leq \sigma_{Do} \cdot W_o.$$

$M_{ored}$  je tzv. redukovaný ohybový moment.

**Příklad:**

Vypočítejte průměr hřídele elektromotoru o výkonu  $P = 10\text{ kW}$  a otáčkách  $n = 1\,444\text{ min}^{-1}$  v místě, kde je nasazeno kuličkové ložisko, za předpokladu, že maximální krouticí moment je  $M_{kmax} = 2,7M_k$  a že hřídel je z oceli 11 600. Na hřídeli je řemenice pro plochý řemen o průměru  $D = 250\text{ mm}$ ,  $l_1 = 90\text{ mm}$ .

**Řešení:**

Krouticí moment určíme z výkonu a otáček, před výpočtem momentu ohybového musíme nejprve vypočítat velikost síly  $F$ , která bude v nejnepříznivějším případě 5násobkem obvodové síly.

Obr. 101

Krouticí moment:

$$M_k = \frac{P}{\omega} = \frac{P}{2\pi n} = \frac{10\,000\text{ W}}{2\pi \cdot 24,07\text{ s}^{-1}} = \underline{66,12\text{ (Nm)}}.$$

Obvodová síla:

$$F_t = \frac{2 \cdot 2,7 M_k}{D} = \frac{2 \cdot 2,7 \cdot 66,12 \cdot 10^3 \text{ Nmm}}{250 \text{ mm}} = \underline{1\,428,2 \text{ (N)}}.$$

Ohybový moment (počítáno s 5násobkem síly):

$$M_o = F_{max} \cdot l_1 = 5 \cdot 1\,428,2 \text{ N} \cdot 90 \text{ mm} = \underline{642\,690,00 \text{ (Nmm)}}.$$

Redukovaný moment:

$$M_{ored} = \sqrt{M_o^2 + 0,75 \cdot M_k^2} = \sqrt{642\,690,00^2 \text{ (Nmm)}^2 + 0,75 \cdot 66\,120,00^2 \text{ (Nmm)}^2} = \underline{645\,235,87 \text{ (Nmm)}}.$$

Průřezový modul a průměr hřídele (dovolené napětí volíme 80 MPa):

$$M_{ored} \leq W_o \cdot \sigma_{Do}, W_{omin} = \frac{M_{ored}}{\sigma_{Do}} = \frac{645\,235,87 \text{ Nmm}}{80 \text{ MPa}} = 8\,065,45 \text{ (mm}^3\text{)},$$

$$d = \sqrt[3]{\frac{32 W_o}{\pi}} = \sqrt[3]{\frac{32 \cdot 8\,065,45 \text{ mm}^3}{\pi}} = \underline{43,50 \text{ (mm)}}.$$



**Otázky a úkoly:**

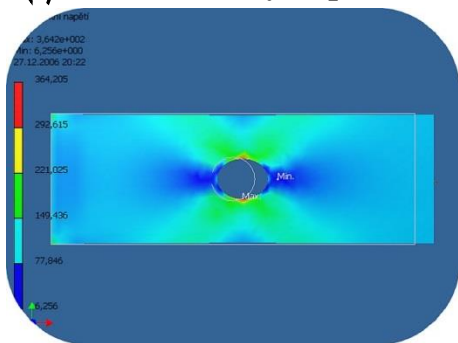
1. Vysvětlete pojem jádro průřezu.
2. Jaký je rozdíl mezi sourodými a nesourodými napětími?
3. Jaký význam má redukované napětí?

## 14. KONCENTRACE NAPĚTÍ

Obsah této kapitoly:

- Koncentrátory napětí a součinitel tvaru
- Použití součinitele tvaru při statickém zatížení

### Koncentrátory napětí a součinitel tvaru



Dříve uvedené vztahy pro napětí neuvažují vliv změn tvaru na rozložení napětí. Ve skutečnosti však jakákoli změna tvaru způsobí změnu rozložení napětí v daném průřezu a v jeho určitém místě vznikne napětí větší, než odpovídá základnímu výpočtu.

**Změny tvaru (obecně vruby) působí jako koncentrátory napětí a oblasti, které jsou jimi ovlivněny, jsou oblastmi koncentrace napětí.**

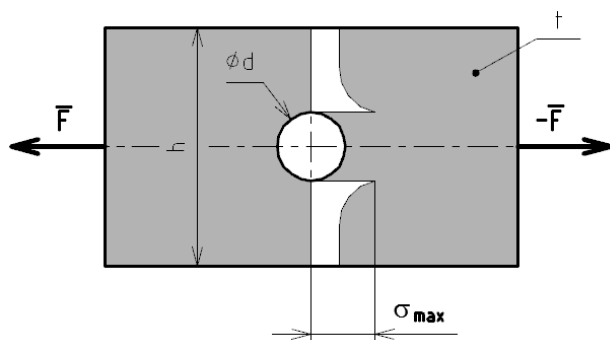
Obr. 102



*Vruby – koncentrátory napětí mohou být konstrukční (otvory, drážky, zápichy, závity, osazení atd.), technologické (stopy po nástroji, vady materiálu, vliv struktury – grafit v šedé litině atd.), nebo zaviněné provozem (koroze, opotřebení, vrypy aj.)*

**Vliv konstrukčního koncentrátoru napětí vyjadřuje součinitel tvaru  $\alpha$ . Maximální napětí dostaneme, jestliže součinitelem tvaru vynásobíme jmenovité napětí (určíme jej podle základní rovnice bez vlivu koncentrátoru<sup>1</sup>). Součinitel tvaru vyhledáme pro typické případy v literatuře<sup>2</sup> (získává se experimentálními metodami<sup>3</sup>).**

Jmenovité (nominální) napětí:



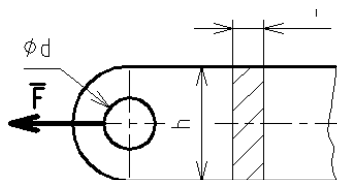
$$\sigma_n = \frac{F}{S} = \frac{F}{(h-d) \cdot t}$$

Maximální napětí:

$$\sigma_{max} = \alpha \cdot \sigma_n, \text{ nebo } \tau_{max} = \alpha_\tau \cdot \tau_n.$$

Obr. 103

**Příklad –**  
U ploché tyče s (průměr otvoru optimální přibližně 0,5.



**ukázka:**

okem závisí součinitel tvaru na poměru  $d/h$  ku šířce). Po vyhodnocení průběhu vychází, že poměr  $d/h$  (minimální součinitel tvaru) je

Obr. 104

<sup>1</sup> Někdy se počítá z oslabené plochy, někdy z neoslabené; u grafu nebo tabulky by měla být uvedena metoda.

<sup>2</sup> Např. strojnické tabulky, nebo TUREK, I. *Mechanika – Sbírká úloh*. Praha : SNTL, 1982. Dále viz literatura.

<sup>3</sup> Metoda konečných prvků (viz úvodní obr.), fotoelasticimetrie, tenzometrie aj.

## Použití součinitele tvaru při statickém zatížení

U **houževnatých materiálů** se součinitel tvaru obvykle nepoužívá, protože v nejméně zatížených vláknech dojde k místní plastické deformaci, která má zpevňující účinek. U **křehkých materiálů** obecně nedochází k plastické deformaci, a proto je možno vynásobit součinitelem tvaru jmenovité napětí a tuto hodnotu porovnávat s mezí pevnosti. Výjimkou je ovšem např. šedá litina, která obsahuje lupínkový grafit. Ten má malou pevnost a chová se jako trhlina. Mez pevnosti v tahu, zjištěná statickou zkouškou, zahrnuje vliv takových koncentrátorů napětí. Proto se tvarový součinitel nepoužije. Jiným případem jsou odlitky; ty obsahují mikronecelistvosti (bublinky, vměstky), které jsou závažnější než konstrukční vruby.

Jinak nakládáme s vlivem tvaru v případě proměnného (kmitavého, dynamického) namáhání.



### *Úkol*

1. Na konkrétní součásti určete koncentrátoři napětí a druhy namáhání.



## 15. ÚNAVOVÉ PORUŠENÍ ZPŮSOBENÉ PROMĚNNÝM ZATÍŽENÍM

Obsah této kapitoly:

- Vznik únavových lomů
- Příčiny vzniku únavových trhlin
- Druhy cyklů
- Mez únavy materiálu
- Diagramy mezi únavy

### Vznik únavových lomů



V předběžném výpočtu byl uvažován vliv proměnného (dynamického) namáhání snížením dovoleného napětí pomocí součinitelů  $c_{II}$  a  $c_{III}$ . V následujících kapitolách ukážeme cestu k přesnějším výpočtům dynamicky namáhaných součástí. V těchto případech hrozí **únavový lom**, k němuž dochází často při běžném provozním zatížení, kdy je namáhání hluboko pod mezí pevnosti materiálu dané součástí.

Obr. 105

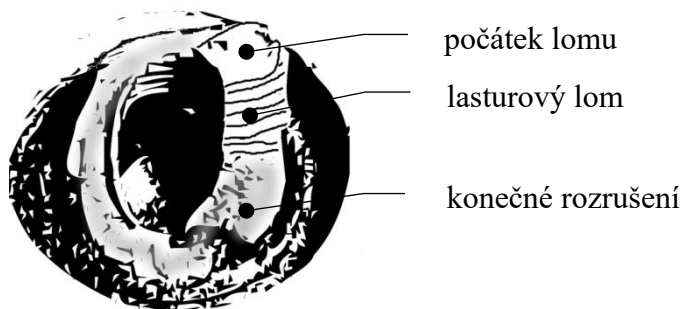
Např. u rotujícího hřídele s řemenicí je každé vlákno na jeho povrchu střídavě natahováváno a stlačováno<sup>1</sup>, drát šroubovitě pružiny je zatěžován v krutu a odlehčován apod. Při dlouhodobém působení takového zatížení může dojít k lomu, který se zásadně liší od lomu způsobeného statickým zatížením.

---

**Při statickém zatěžování houževnatého materiálu se lom ohlašuje velkou plastickou deformací. Tento signál u únavového lomu chybí. Únavový lom je náhlý, a proto nebezpečný<sup>2</sup>. Vývoj únavového lomu:**

1. stadium: vznik jedné nebo několika mikrotrhlin v důsledku místního přetížení,
  2. stadium: makrotrhliny, které postupují, vzniká lasturový lom, povrchy se o sebe třou, vznikají tzv. odpočinkové čáry,
  3. stadium: pásmo konečného rozrušení (rychlé šíření trhliny), křehký, houževnatý, nebo smíšený lom.
- 

Na obrázcích je porušená středová osa jízdního kola po freeridovém skoku z výšky. Oblast konečného dolomení je velká, což ukazuje na velké rázové zatížení.



Obr. 106

<sup>1</sup> Podmínkou vzniku únavových trhlin je, že namáhání zasahuje alespoň částečně tahovou oblast.

<sup>2</sup> Konkrétní vzhled lomové plochy se liší podle druhu zatěžování a úrovně napětí.

## 🔊 Příčiny vzniku únavových trhlin

Hlavní příčiny jsou:

1. Konstrukční vruby, způsobující koncentraci napětí.
2. Opakovaný kluzný nebo valivý dotyk částí, při němž může dojít k místnímu porušení.
3. Stopy po nástrojích, nevhodně vyražené značky, chyby při výrobě a montáži.
4. Struktura materiálu, vměstky, dutiny apod.

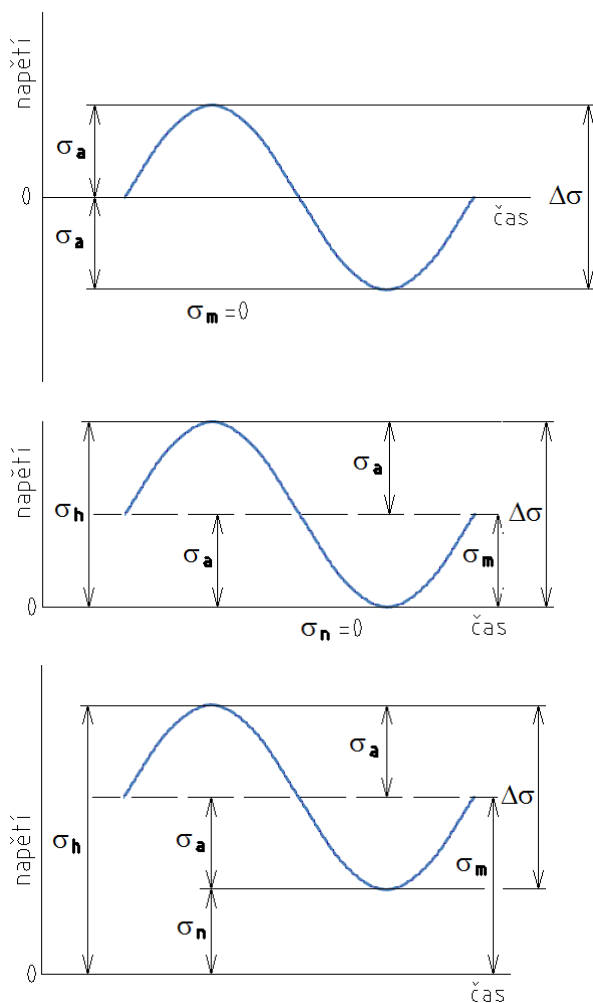


Na vznik a rychlost šíření trhliny mají vliv i další faktory, např. koroze, změny teploty, frekvence zatěžování, dokonce i třeba smysl otáčení.

## 🔊 Druhy cyklů

Proměnné napětí, vznikající při dynamickém namáhání, znázorňujeme sinusoidami. Docela dobře to odpovídá skutečnosti, protože dynamické namáhání je často důsledkem rotačního pohybu stroje. V této úrovni se omezíme na tento harmonický charakter kmitání.

Jednu změnu napětí nazýváme cyklem. Cykly jsou většinou střídavé (souměrné a nesouměrné), míjivé a pulsující.



Základní časové průběhy cyklů znázorňuje obrázek. V horním grafu je zobrazen cyklus střídavý souměrný, v prostředním míjivý a v dolním pulsující.

Pro popis používáme následující charakteristiky:

$\sigma_n$  = dolní napětí cyklu,

$\sigma_h$  = horní napětí cyklu,

$\sigma_a$  = amplituda napětí,

$\sigma_m$  = střední napětí,

$\Delta\sigma$  = rozkmit napětí.

Platí:

$$\sigma_m = \frac{\sigma_h + \sigma_n}{2},$$

$$\sigma_a = \left| \frac{\sigma_h - \sigma_n}{2} \right|.$$

Obr. 107

## Mez únavy materiálu

**Mez únavy materiálu je charakterizována největší amplitudou napětí, kterou materiál vydrží teoreticky při nekonečném počtu cyklů. Označuje se  $\sigma_C$ .**

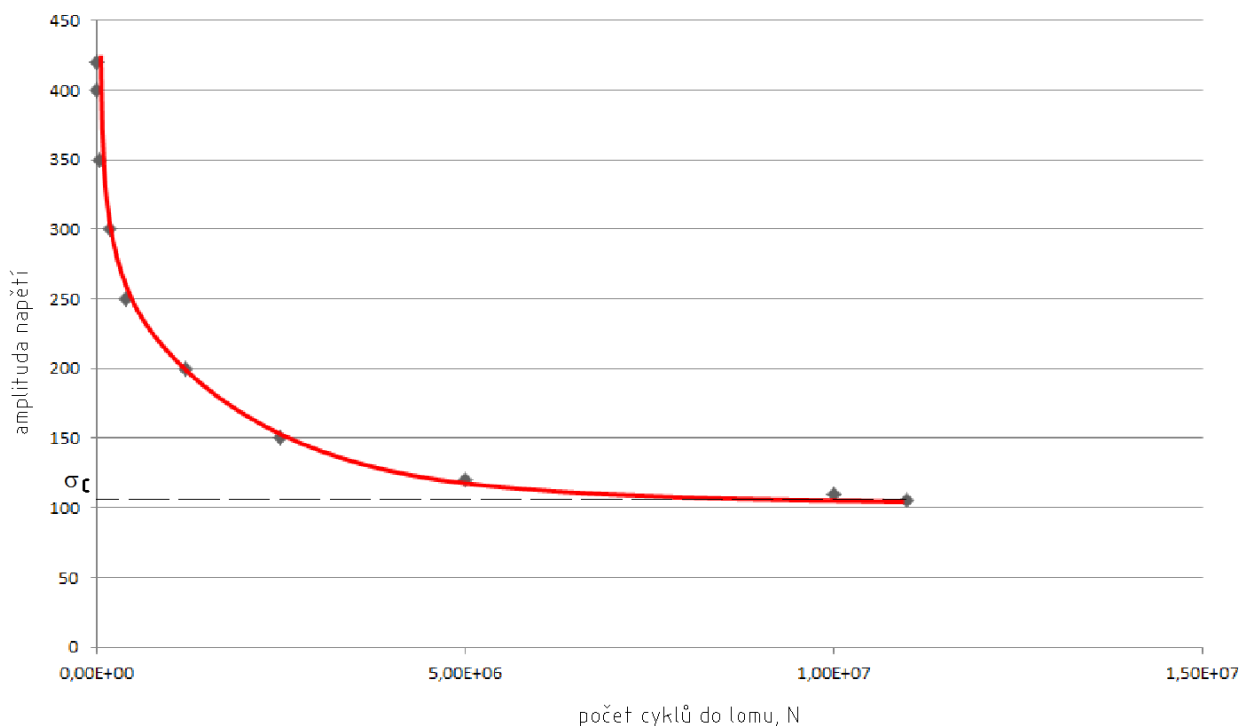
**Časovaná mez únavy je největší amplituda napětí, kterou materiál vydrží požadovaný počet cyklů. Označuje se  $\sigma_N$ .**

Prvním problémem, který zde bude zmíněn, je zjištění hodnoty meze únavy (pro výběr materiálů nalezneme výsledky těchto zjištění ve strojnických tabulkách), druhým problémem pak je rozdíl meze únavy zkušebního vzorku a skutečné součásti.

### Zjištění meze únavy, Wöhlerova<sup>1</sup> křivka

Únavové zkoušky se často provádějí na vysokootáčkovém zkušebním stroji pro zkoušky ohybu za rotace (střídavý prostý ohyb, tj, bez smyku, prostřednictvím závaží). Kromě toho je možno provádět zkoušky tahem-tlakem, krutem, nebo kombinovaným namáháním<sup>2</sup>.

Pro zkoušku je potřeba několika zkušebních tyčí. První zkouška se provádí při amplitudě, která se blíží mezi pevnosti materiálu (tyč vydrží několik málo kmitů). Další zkoušky se provádějí při snižující se hodnotě amplitudy. U slitin železa přejde takto vzniklá křivka při určité hodnotě amplitudy v horizontálu (mez únavy).



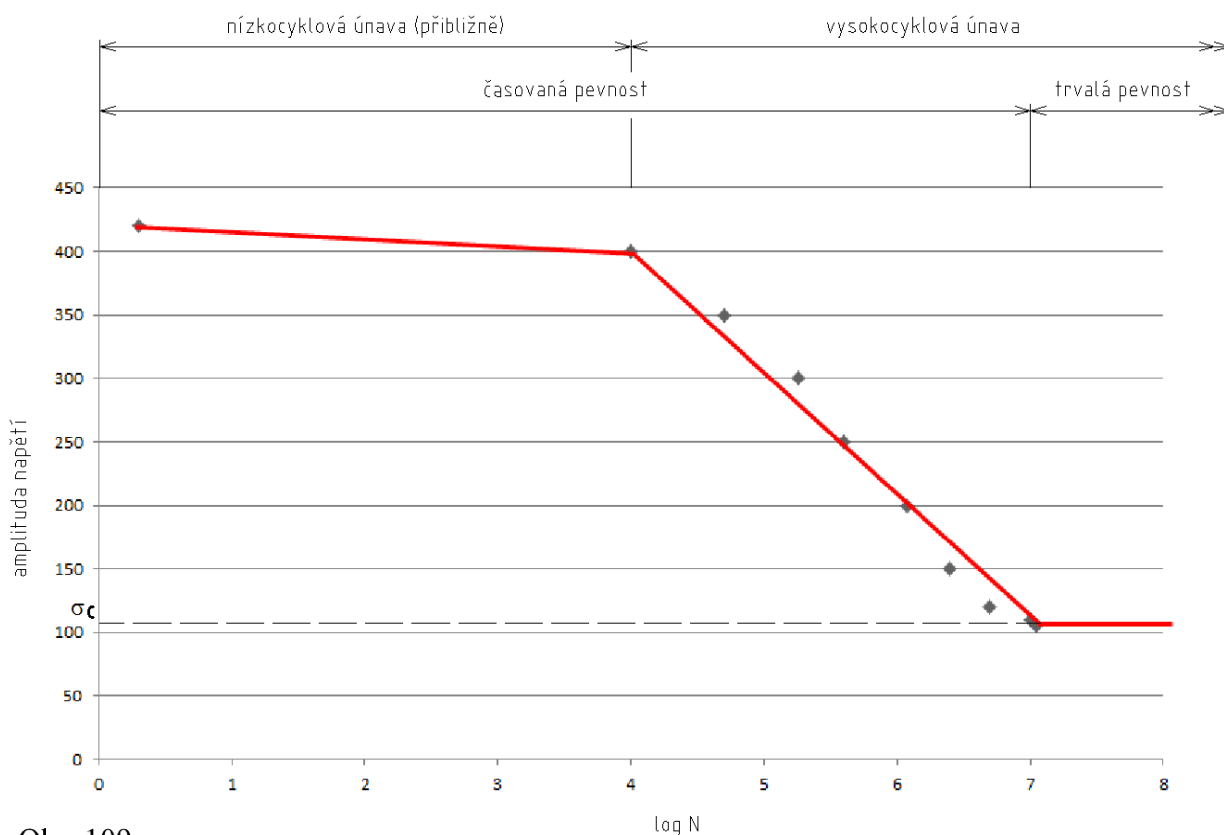
Obr. 108

Pro slitiny železa a pro měď se uvažuje jako „nekonečný počet cyklů“ hodnota  $10^7$ , pro lehké kovy  $10^8$ .

<sup>1</sup> Wöhler, August (1819-1914), významný německý technik, syn slavného chemika Friedricha W. Systematicky zkoumal únavu materiálu, impulsem byly četné lomy náprav železničních vagónů. Wöhlerova křivka se v anglosaské literatuře nazývá *S-N* diagram.

<sup>2</sup> Dále uvedené diagramy se vztahují k oceli, jejíž minimální pevnost je 400 MPa. Zkouška byla provedena střídavým tahem-tlakem s frekvencí 200 Hz.

Pro výraznější odlišení jednotlivých pásem a zvýraznění meze únavy se křivka vynáší v semi-logaritmických souřadnicích (logaritmická stupnice na ose počtu cyklů).



Obr. 109

### Diagramy mezi únavy

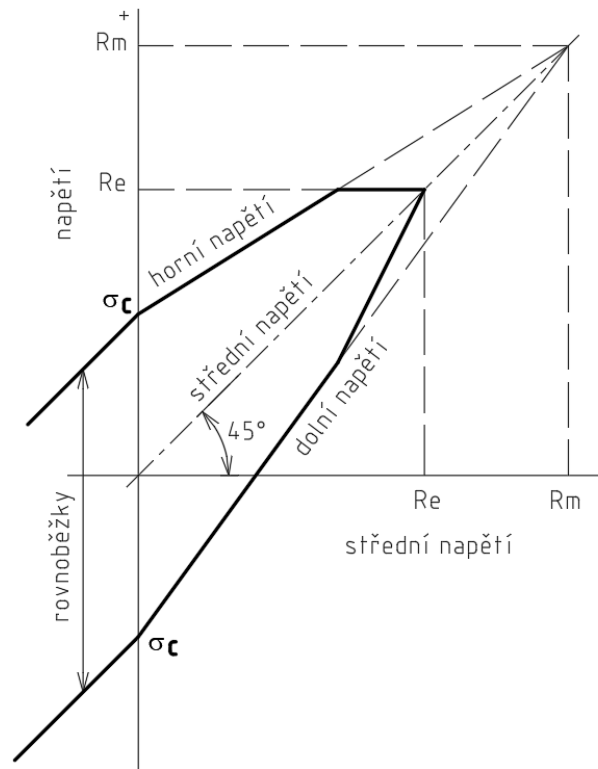
Výsledky všech únavových zkoušek pro všechny způsoby cyklického namáhání (různá střední napětí) se souhrnně zpracovávají do diagramů, které vyjadřují kritéria únavového porušení.

#### Smithův diagram

Smithův diagram je konstruován na základě Wöhlerových křivek pro různé hodnoty středního napětí. Pro praktické účely se křivky v diagramu nahrazují přímkami.

Při sestavení zjednodušeného diagramu pro daný materiál a druh namáhání vycházíme ze známých hodnot meze pevnosti  $R_m$ , meze kluzu  $R_e$  a meze únavy  $\sigma_c$  pro střídavý souměrný cyklus:

1. Na vodorovné ose ( $x$ ) vynášíme střední napětí, na svislé ose ( $y$ ) všechna napětí. Počátkem vedeme přímkou se sklonem  $45^\circ$  – každému cyklu přísluší střední napětí, které se nanáší na obě osy (spojnice středních napětí všech cyklů – čára středních napětí).
2. Na osu  $y$  vyneseme pro  $\sigma_m = 0$  hodnotu  $\pm\sigma_c$ .
3. Z těchto bodů vedeme čáry horních a dolních mezních napětí, které se protínají v bodě, odpovídajícímu mezi pevnosti.
4. Horní část diagramu omezíme mezi kluzem, protože při jejím překročení dochází k porušení po malém počtu cyklů.



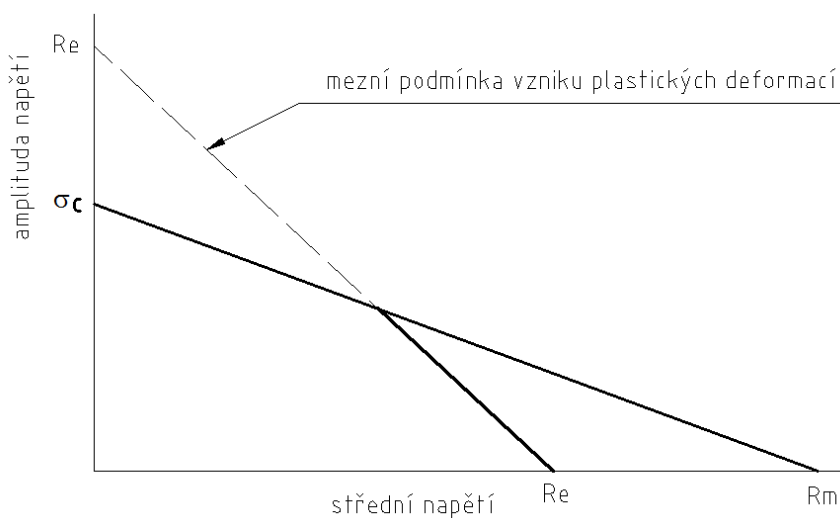
Obr. 110

Smithův diagram pro litinu je ukončen mezí pevnosti.

### Haighův diagram

Často využívaný diagram se snadnou konstrukcí. Kritériem únavového porušení je v nejjednodušším případě přímka (Goodmanovo kritérium). Tato přímka se snadno konstruuje a je důležitým základem pro další studium, nicméně představuje poněkud zkreslující kritérium, jehož míru zkreslení neumíme určit; dnes víme, že kritérium únavového porušení není jednoduchou hranicí, ale spíše pásmem s určitou pravděpodobností poruchy.

1. Na osu  $x$  vyneseme mez kluzu a mez pevnosti, na osu  $y$  mez únavy při nulovém středním napětí, nebo časovanou mez únavy.
2. Sestrojíme kritérium porušení (zde uvedena pouze Goodmanova přímka).



Obr. 111

## 16. URČENÍ DYNAMICKÉ BEZPEČNOSTI

Obsah této kapitoly:

- Mez únavy skutečné součásti
- Dynamická bezpečnost při namáhání jednoduchém
- Dynamická bezpečnost při namáhání složeném

### Mez únavy skutečné součásti

Mez únavy skutečné součásti (snížená mez únavy) se liší od meze únavy stanovené na zkušebních vzorcích, které jsou připravené a zkoušené za přesně stanovených podmínek. Příčiny odlišnosti spočívají v **materiálu** (složení, struktura), ve **výrobě** (způsob, tepelné zpracování, koroze, povrch), v **konstrukci** (velikost, tvar, stav napjatosti) aj.

---

Ve zjednodušené představě zahrnujeme tři hlavní vlivy:

1. Tvar a materiál (vliv koncentrátorů napětí a vrubové citlivosti materiálu).
2. Velikost součásti (ovlivňuje především růst povrchových vad) – neprojevuje se při střídavém tahu/tlaku.
3. Stav povrchu (rýhy, škrábance, textura).



Mez únavy součásti zjišťujeme buď experimentálně, nebo pomocí matematických vztahů, odvozených na základě analýz a příslušných teorií. Pro praktickou potřebu jsou výsledky shrnuty do součinitelů a grafů dostupných v literatuře.

### Vliv tvaru a vrubové citlivosti materiálu

Různé materiály jsou při kmitavém namáhání různě citlivé na přítomnost vrubů. Pokud je materiál **plně citlivý na vruby**, použijeme součinitel tvaru  $\alpha$ , jímž dělíme mez únavy vzorku. U materiálů s různou mírou citlivosti k vrubům pracujeme se **sníženou hodnotou součinitele tvaru**, kterou pak nazýváme **vrubový součinitel a označujeme  $\beta$** .

---

Vrubová citlivost<sup>1</sup>  $\eta$  je vyjádřena rovnicí:

$$\eta = \frac{\beta - 1}{\alpha - 1}$$



Při výpočtu většinou určíme součinitel tvaru  $\alpha$  a podle materiálu součinitel vrubové citlivosti  $\eta$ . Vrubový součinitel  $\beta$  pak vypočítáme<sup>2</sup>. Pro nezákladnější typy vrubů jsou grafy pro určení vrubových součinitelů uvedeny v literatuře.

---

### Mez únavy zkušební vzorku dělíme vrubovým součinitelem $\beta$ .

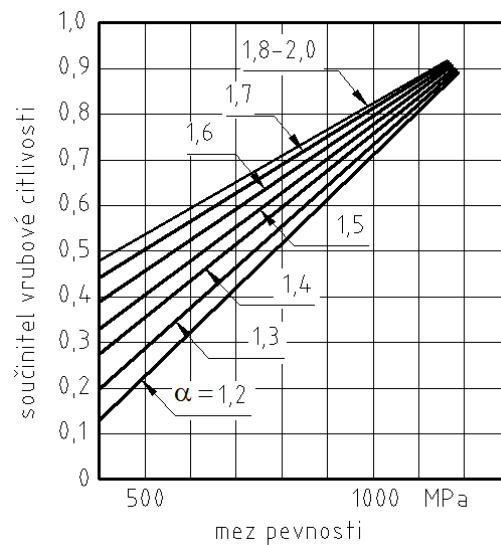
Součinitel vrubové citlivosti můžeme pro oceli přibližně určit z následujícího diagramu (podle BINDER, R. *Mechanika 2 pro 2. ročník SPŠ strojnických*. Viz použitá literatura.). Oceli s vyšší

---

<sup>1</sup> U materiálů s menší citlivostí k vrubům dochází v kořeni vrubu k plastické deformaci a zpevnění. Skutečná špička napětí  $\sigma_{max,skut} - \sigma_n = \beta\sigma_n - \sigma_n$  je proto menší než teoretická špička  $\sigma_{max,teor} - \sigma_n = \alpha\sigma_n - \sigma_n$ . Součinitel vrubové citlivosti je dán poměrem špiček  $\eta = \frac{\beta\sigma_n - \sigma_n}{\alpha\sigma_n - \sigma_n} = \frac{\beta - 1}{\alpha - 1}$ .

<sup>2</sup> V případě pochybností nebo absence údaje o vrubové citlivosti použijeme  $\beta = \alpha$ .

pevností jsou k vrubům citlivější; k tomu je nutno přihlížet při volbě materiálu (u součásti s vruby není jediným řešením použití materiálu vysoké pevnosti).



Obr. 112

### Vliv velikosti součásti

Vliv velikosti součásti vyjadřujeme součinitelem velikosti  $\varepsilon_m$  (též  $k_b$ ). Nalezneme jej v literatuře (grafy), nebo lze použít vztahů pro střídavé zatěžování ohybem za rotace a krutem:

$\varepsilon_m$ :

$$1,24d^{-0,107} \text{ pro } 2,79 \leq d \leq 51 \text{ mm,}$$

$$1,51d^{-0,157} \text{ pro } 51 < d \leq 254 \text{ mm.}$$

(Podle SHIGLEY, J. E. aj. *Konstruování strojních součástí*. Viz použitá literatura.)

### Mez únavy zkušební vzorku násobíme součinitelem velikosti $\varepsilon_m$ .

### Vliv stavu povrchu

Vliv stavu povrchu vyjadřujeme součinitelem stavu povrchu  $\varepsilon_p$  (též  $k_p$ ). Opět jej lze určit z grafů v literatuře nebo ze vztahu:

$$\varepsilon_p = aR_m^b.$$

$R_m$  je mez pevnosti materiálu v MPa a hodnoty  $a$ ,  $b$  určíme z tabulky.

povrch dokončený	součinitel $a$	exponent $b$
broušením	1,58	-0,085
obráběním nebo tažením za studena	4,51	-0,265
válcováním za tepla	57,7	-0,718
kováním	272,0	-0,995

(Podle SHIGLEY, J. E. aj. *Konstruování strojních součástí*. Viz použitá literatura.)

### Mez únavy zkušební vzorku násobíme součinitelem stavu povrchu $\varepsilon_p$ .

Snížená mez únavy pro danou součást je na základě předchozího určena vztahem:

$$\sigma_{cef} = \frac{\sigma_c \varepsilon_m \varepsilon_p}{\beta}$$

(Podobně pro krut).

### 🔊) Dynamická bezpečnost při jednoduchém namáhání

**Pro určení dynamické bezpečnosti musíme určit mezní cyklus, s nímž porovnáme skutečně působící cyklus.**

#### Střídavý souměrný cyklus

Pro určení dynamické bezpečnosti postačí znát mez únavy materiálu a vypočítat sníženou mez únavy. Dynamická bezpečnost je pak dána vztahem:

$$k_d = \frac{\sigma_{cef}}{\sigma_a}, \text{ příp. } \frac{\tau_{cef}}{\tau_a}$$

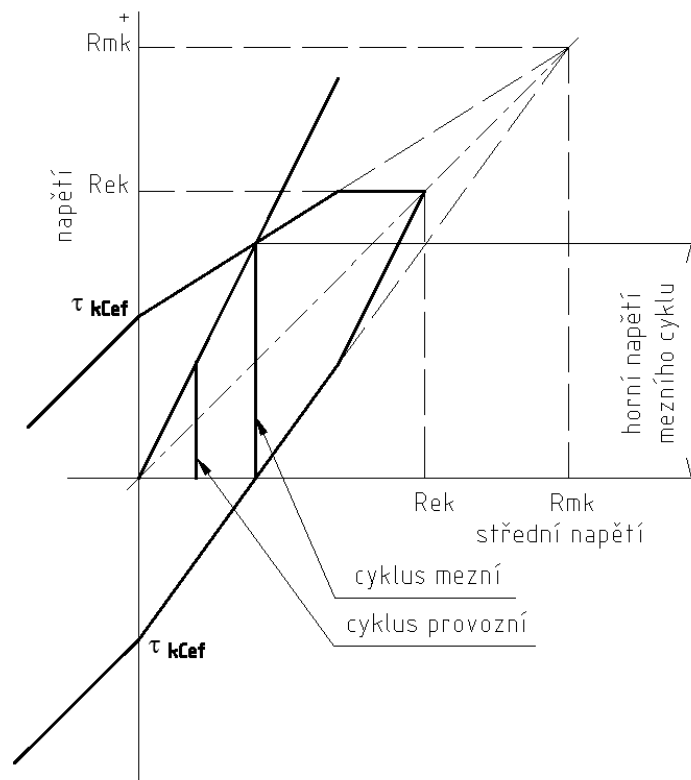
Hodnoty  $\sigma_a$ ,  $\tau_a$  jsou amplitudy provozních cyklů.

#### Míjivý cyklus

Všechny míjivé cykly jsou podobné, což je vyjádřeno konstantním poměrem horního a středního napětí. Horní napětí všech míjivých cyklů leží na přímce se směrnici

$$\tan \alpha = \frac{\sigma_h}{\sigma_m} = 2.$$

Průsečík této přímky s čarou horních napětí ve Smithově diagramu určí horní napětí mezního míjivého cyklu, s nímž porovnáme cyklus provozní (musíme sestrojít Smithův diagram se sníženou mezí únavy pro skutečnou součást).



Obr. 113



Dynamická bezpečnost je dána vztahem:

$$k_d = \frac{\text{horní napětí nebo amplituda mezního cyklu}}{\text{horní napětí nebo amplituda provozního cyklu}}$$

**Nesouměrné střídavé a pulsující cykly (vybrané typické případy)**

a) Při stálém středním napětí roste amplituda<sup>1</sup>:

Dynamická bezpečnost je dána podobně jako u cyklu souměrného střídavého:

$$k_d = \frac{\text{amplituda nebo rozkmit mezního cyklu}}{\text{amplituda nebo rozkmit provozního cyklu}}$$

(Viz první obrázek).

b) Roste amplituda a úměrně s ní i střední napětí<sup>2</sup>:

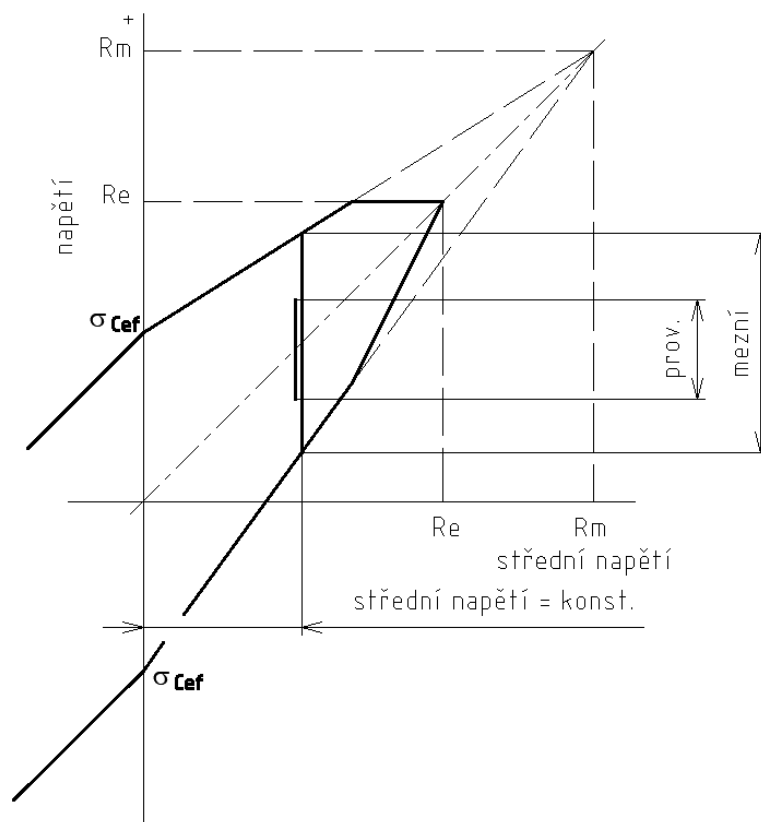
Postupujeme podobně jako u míjivého zatížení. Sestrojíme pomocnou přímku se směrnici

$$\tan \alpha = \frac{\sigma_h}{\sigma_m} = \text{konst.}$$

Dynamická bezpečnost:

$$k_d = \frac{\text{amplituda nebo rozkmit mezního cyklu}}{\text{amplituda nebo rozkmit provozního cyklu}}$$

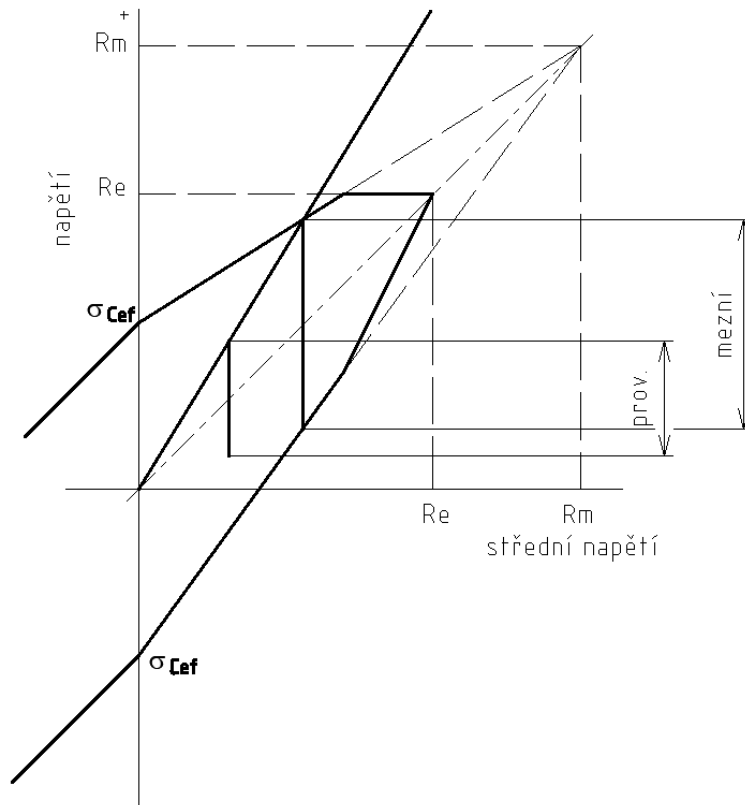
(Druhý obrázek).



Obr. 114

<sup>1</sup> Např. u pružin.

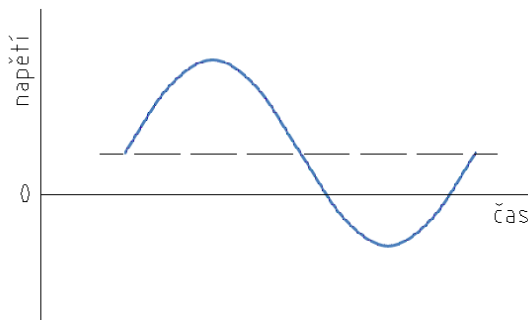
<sup>2</sup> Např. šrouby upevňující hlavy válců pístových strojů.



Obr. 115

**Příklad:**

V průřezu součásti vznikají působením kmitavého namáhání normálová napětí. Horní napětí má velikost 60 MPa, dolní napětí má velikost -26 MPa. Určete velikost středního napětí a velikost výkmitu a amplitudy. Nakreslete od ruky průběh.



Obr. 116

**Řešení:**

$$\sigma_m = \frac{\sigma_h + \sigma_n}{2} = \frac{60 + (-26)}{2} = \underline{17 \text{ (MPa)}}$$

$$\Delta\sigma = |\sigma_h - \sigma_n| = 60 + 26 = \underline{86 \text{ (MPa)}}$$

$$\sigma_a = \left| \frac{\sigma_h - \sigma_n}{2} \right| = \frac{60 + 26}{2} = \underline{43 \text{ (MPa)}}$$

**Příklad:**

Broušený válcový hřídel bez vrubů s průměrem  $d = 45 \text{ mm}$ , z oceli 11 373 je namáhán krutem souměrným střídavým cyklem. Určete sníženou mez únavy.

**Řešení:**

Mez únavy (strojnické tabulky) je 95 až 110 MPa. Nejsou-li konstrukční vruby, je hodnota vrubového součinitele 1. Součinitel velikosti určíme podle vztahu  $\varepsilon_m = 1,24d^{-0,107} = 1,24 \cdot 45^{-0,107} = 0,825$ , součinitel stavu povrchu je  $\varepsilon_p = aR_m^b = 1,58 \cdot 370^{-0,085} = 0,956$ .

$$\tau_{cef} = \frac{(95 \div 110)\varepsilon_m \varepsilon_p}{\beta} = \frac{(95 \div 110) \cdot 0,825 \cdot 0,956}{1} = \underline{74,9 \div 86,8 \text{ (MPa)}}.$$

**Příklad:**

Určete dynamickou bezpečnost uvedeného hřídele, je-li zatížen kroučícím momentem  $M_k = \pm 1\,058 \text{ Nm}$ . Volte minimální hodnotu meze únavy.

**Řešení:**

Provozní amplituda:

$$\tau_a = \frac{M_k}{W_k} = \frac{1\,058 \cdot 10^3 \text{ Nmm}}{0,2 \cdot 45^3 \text{ mm}^3} = 58 \text{ (MPa)},$$

dynamická bezpečnost:

$$k_d = \frac{\tau_{cef}}{\tau_a} = \frac{75 \text{ MPa}}{58 \text{ MPa}} = \underline{1,3}.$$

**🔊) Dynamická bezpečnost při namáhání složeném**

**Pro houževnaté materiály vyjádříme dynamickou bezpečnost tak, že porovnáme amplitudu redukovaného napětí s amplitudou mezního cyklu při normálovém zatížení (ohyb).**

Pro houževnaté materiály platí podle teorie HMM (uvažujeme ohyb a krut hřídelů):

$$\sigma_{red}^2 = \sigma_a^2 + 3\tau_a^2.$$

Rovnici vydělíme druhou mocninou meze únavy v ohybu a využijeme přibližného vztahu mezi mezí únavy v ohybu a v krutu:

$$\frac{\sigma_{red}^2}{\sigma_{oc}^2} = \frac{\sigma_a^2}{\sigma_{oc}^2} + 3 \frac{\tau_a^2}{\sigma_{oc}^2}; \quad \tau_c \doteq 0,6\sigma_{oc} \doteq \frac{\sigma_{oc}}{\sqrt{3}}, \text{ tedy } \sigma_{oc} = \sqrt{3}\tau_c.$$

Po dosazení:

$$\frac{\sigma_{red}^2}{\sigma_{oc}^2} = \frac{\sigma_a^2}{\sigma_{oc}^2} + \frac{(\sqrt{3}\tau_a)^2}{(\sqrt{3}\tau_c)^2} = \frac{\sigma_a^2}{\sigma_{oc}^2} + \frac{\tau_a^2}{\tau_c^2}.$$

Vyjádříme poměry napětí dynamickými bezpečnostmi:

$$\frac{1}{k_d^2} = \frac{1}{k_{do}^2} + \frac{1}{k_{dk}^2}.$$

**Celková dynamická bezpečnost:**

$$k_d = \frac{k_{do}k_{dk}}{\sqrt{(k_{do}^2 + k_{dk}^2)}}$$

**Při dílčích dynamických bezpečnostech  $k_{do} = k_{dk} = \sqrt{2}$  by vyšla celková dynamická bezpečnost pouze právě 1. Proto je nutno vždy kontrolovat celkovou dynamickou bezpečnost.**

***Příklad:***

Hladký broušený hřídel o průměru  $d = 35$  mm je namáhán střídavým ohybovým momentem  $M_o = \pm 325$  Nm a míjivým krouticím momentem  $M_k = 300$  Nm. Materiál hřídele je ocel 11 600. Určete celkovou dynamickou bezpečnost.

***Řešení:***

Řešení provedeme zvlášť pro ohyb a krut (napětí, snížená mez únavy, bezpečnost) a z výše uvedeného vztahu určíme celkovou bezpečnost.

a) ohyb:

$$\sigma_a = \frac{M_o}{W_o} = \frac{M_o}{0,1d^3} = \frac{325 \cdot 10^3 \text{ Nmm}}{0,1 \cdot 35^3 \text{ mm}^3} = 75,8 \text{ (MPa)}.$$

$\sigma_{oc} = 210$  MPa (strojnické tabulky, minimální hodnota).

$$\varepsilon_m = 1,24d^{-0,107} = 1,24 \cdot 35^{-0,107} = 0,85; \quad \varepsilon_p = aR_m^b = 1,58 \cdot 600^{-0,085} = 0,92; \quad \beta = 1.$$

Snížená mez únavy:

$$\sigma_{ocef} = \frac{\sigma_{oc} \varepsilon_m \varepsilon_p}{\beta} = \frac{210 \text{ MPa} \cdot 0,85 \cdot 0,92}{1} = 164,2 \text{ MPa}.$$

$$k_{do} = \frac{\sigma_{ocef}}{\sigma_a} = \frac{164,2 \text{ MPa}}{75,8 \text{ MPa}} = 2,2.$$

b) krut:

$$\tau_h = \frac{M_k}{W_k} = \frac{M_k}{0,2d^3} = \frac{300 \cdot 10^3 \text{ Nmm}}{0,2 \cdot 35^3 \text{ mm}^3} = 35 \text{ MPa}.$$

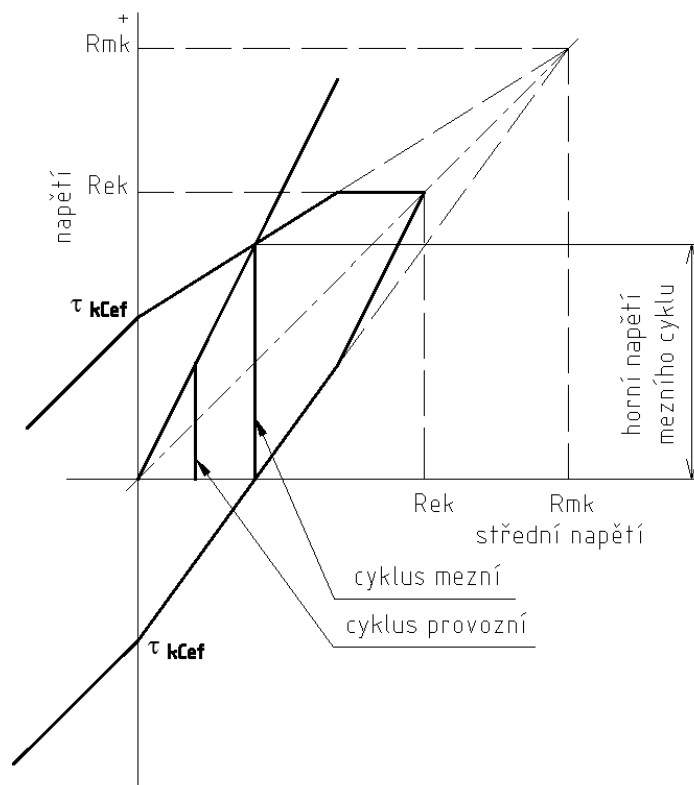
$\tau_{kc} = 150$  MPa (strojnické tabulky, minimální hodnota).

$$\varepsilon_m = 1,24d^{-0,107} = 1,24 \cdot 35^{-0,107} = 0,85; \quad \varepsilon_p = aR_m^b = 1,58 \cdot 600^{-0,085} = 0,92; \quad \beta = 1.$$

Snížená mez únavy:

$$\tau_{kcef} = \frac{\tau_{kc} \varepsilon_m \varepsilon_p}{\beta} = \frac{150 \text{ MPa} \cdot 0,85 \cdot 0,92}{1} = 117,3 \text{ MPa}.$$

Smithův diagram (nutno sestavit v měřítku buď na milimetrový papír, nebo v grafickém programu):



Obr. 117

Horní napětí mezního mívivého cyklu:

$$\tau_{hmez} = 177 \text{ MPa.}$$

Dynamická bezpečnost:

$$k_{dk} = \frac{\tau_{hmez}}{\tau_h} = \frac{177 \text{ MPa}}{35 \text{ MPa}} = 5,1.$$

c) celková dynamická bezpečnost:

$$k_d = \frac{k_{do} k_{dk}}{\sqrt{(k_{do}^2 + k_{dk}^2)}} = \frac{2,2 \cdot 5,1}{\sqrt{2,2^2 + 5,1^2}} = \underline{2,0}.$$

**Řešení krutu pomocí Haighova diagramu (a Goodmanova kritéria):**

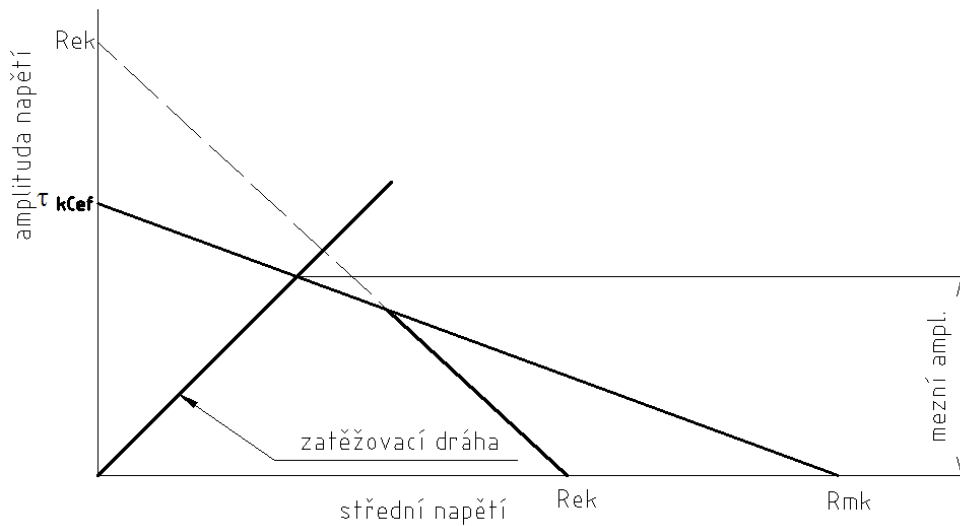
Mezní cyklus určíme pomocí zatěžovací dráhy (přímka se směrnici danou poměrem amplitudy a středního napětí – u mívivého zatížení je tato směrnice rovna 1):

Horní napětí mezního mívivého cyklu (dvojnásobek mezní amplitudy):

$$\tau_{hmez} = 2 \cdot 79 \text{ MPa} = 158 \text{ MPa.}$$

Dynamická bezpečnost:

$$k_{dk} = \frac{\tau_{hmez}}{\tau_h} = \frac{158 \text{ MPa}}{35 \text{ MPa}} = 4,5.$$



Obr. 118



*Nižší bezpečnost je dána vyšší „přísností“ Goodmanova kritéria.*



**Otázky a úkoly:**

1. Jak se projevuje únava materiálu a proč je nebezpečná?
2. Nakreslete základní druhy cyklů a uveďte vztahy mezi napětími.
3. Jak obdržíme Wöhlerovu křivku a co z ní lze vyčíst?
4. Jak se určí dynamická bezpečnost při střídavém a míjivém namáhání?
5. Proč nestačí u kombinovaného namáhání kontrolovat dílčí dynamické bezpečnosti?

## 17. STABILITA TVARU, VZPĚŘ

Obsah této kapitoly:

- Stabilita tvaru obecně, vzpěr
- Pružný vzpěr
- Mez platnosti Eulerovy rovnice pro pružný vzpěr
- Nepružný vzpěr
- Výpočet pomocí součinitele vzpěrnosti

### Stabilita tvaru obecně, vzpěr

V případě, že součásti mají určitý tvar, může se analýza jejich namáhání významně lišit od analýzy při základních způsobech namáhání (tlak, krut apod.). Jedná se např. o případ tenkostěnné nádoby namáhané vnějším přetlakem, popř. o tenkostěnnou trubku namáhanou krutem<sup>1</sup> nebo štíhlý prut namáhaný tlakovou silou<sup>2</sup> aj. V těchto případech dojde při určité velikosti síly ke změně polohy nebo i tvaru průřezu a součást se poruší jiným způsobem (prut místo porušení tlakem vybočí a zlomí se, stěna nádoby se zhroutí a zohýbá – viz obr. apod.). Tyto případy nesouvisí s pevností materiálu, ale s tvarem součásti – hovoříme o ztrátě stability tvaru.



Obr. 119

---

**Vzpěr je případem ztráty stability tvaru (vybočení prutu). Vyskytuje se u dlouhých štíhlých prutů namáhaných rostoucí tlakovou silou. Nebezpečí ztráty stability spočívá v tom, že nastává náhle bez předchozího varování.**

---

Budeme-li zvětšovat zatížení štíhlého prutu tlakovou silou, rozlišíme tři fáze (Euler):

1. Do určité velikosti zatěžující síly (kritická velikost) je prut ve stabilní rovnováze a je namáhan tlakem.
2. Po dosažení kritické síly je prut v rovnováze indiferentní. Zůstane buď rovný, nebo jakkoli ohnutý. Zmenšíme-li sílu, prut se narovná.
3. Při překročení kritické síly se ohyb zvětšuje až do zlomení vzpěry (nestabilita). Příčinou vybočení je skutečnost, že síla není dokonale osová, prut není dokonale homogenní a není dokonale vyroben. V „dokonalém“ případě by k vybočení postačil nepatrný boční impuls.

---

**Přípustná zatěžující síla musí být menší než síla kritická. Míra bezpečnosti:**

$$k = \frac{F_{kr}}{F_{max}}$$



*Případ vzpěru patří už do tzv. nelineární pružnosti, kdy opouštíme předpoklad malých deformací a počítáme se skutečností, že nedeformované a deformované těleso se značně liší. Je zde souvislost s tzv. „teorií chaosu“ (prut vybočí – ale ne vždy můžeme správně odhadnout, na kterou stranu).*

---

<sup>1</sup> Můžete vyzkoušet na zkrucované plechovce od nápoje, případně na plastové láhvi.

<sup>2</sup> K pokusu postačí dlouhé pravítko.

## 🔊) Pružný vzpěr

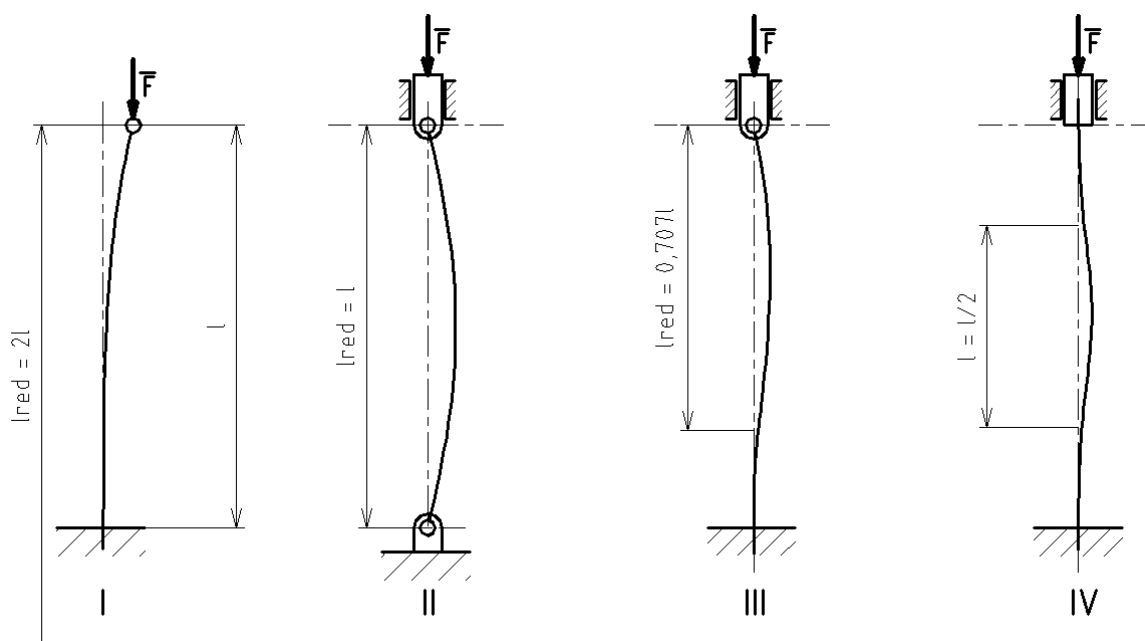
O pružném vzpěru hovoříme tehdy, jestliže napětí při kritické síle nepřekročí mez pružnosti. Týká se dlouhých štíhlých prutů. Výpočtovou metodou je v tomto případě Eulerova<sup>1</sup> metoda. Velikost kritické síly závisí na vztahu průřezových charakteristik a způsobu uložení konců prutu.

**Eulerova kritická síla:**

$$F_{kr} = \frac{\pi^2 \cdot EJ}{l_{red}^2},$$

kde  $E$  je modul pružnosti v tahu,  $J$  je kvadratický moment průřezu k ose, kolem níž se průřez natočí při vybočení, a  $l_{red}$  je tzv. redukovaná délka (závisí na zmíněném uložení konců vzpěry).

Redukovaná délka je délkou sinusové půlvlny ohybové čáry vzpěry<sup>2</sup>. Technické případy nahra-  
zujeme následujícími čtyřmi výpočtovými modely:



Obr. 120

I	II	III <sup>3</sup>	IV
$l_{red} = 2l$	$l_{red} = l$	$l_{red} = \frac{l}{\sqrt{2}} = 0,707l$	$l_{red} = \frac{l}{2}$

## 🔊) Mez platnosti Eulerovy rovnice pro pružný vzpěr

Eulerova rovnice je omezena na pružný vzpěr. Až do kritické síly je v tom případě prut namá-  
hán tlakem a při kritické síle v něm vzniká napětí rovné mezi úměrnosti:

<sup>1</sup> Leonhard Euler (1707-1783), švýcarský matematik a fyzik. Jeden z největších matematiků historie. Zásadně ovlivnil vývoj matematiky, mechaniky a dalších vědních oborů.

<sup>2</sup> Výchozí diferenciální rovnice pro vybočující vzpěru je obdobná rovnici harmonického kmitání.

<sup>3</sup> V praxi je obtížné realizovat úplné vetknutí, osa prutu se v místě vazby vždy mírně natočí. Proto se někdy redu-  
kovaná délka pro případy III a IV uvažuje shodná  $l_{red} = \frac{l}{\sqrt{1,2}}$



$$\sigma_{kr} = \frac{F_{kr}}{S} = \frac{\pi^2 \cdot EJ}{l_{red}^2 S} = \frac{\pi^2 \cdot E}{\frac{l_{red}^2}{J}}$$

Poněkud krkolomný složený zlomek upravíme zavedením nových veličin. Kvadratický poloměr plochy průřezu (poloměr setrvačnosti):

$$i = \sqrt{\frac{J}{S}} \text{ (mm)}, \quad i^2 = \frac{J}{S}$$

Štíhlostní poměr (štíhlost)<sup>1</sup>:

$$\lambda = \frac{l_{red}}{i}$$

Kritické napětí pak vychází

$$\sigma_{kr} = \frac{\pi^2 \cdot E}{\lambda^2}$$

a pro pružný vzpěr platí

$$\sigma_U \geq \frac{\pi^2 \cdot E}{\lambda^2}$$

Odtud mezní štíhlost

$$\lambda_m = \pi \sqrt{\frac{E}{\sigma_U}} \text{ (-)}$$

---

**Vzpěra namáhaná v oblasti pružného vzpěru má štíhlost větší než štíhlost mezní<sup>2</sup> ( $\lambda \geq \lambda_m$ ). Mezní štíhlost závisí modulu pružnosti a na mezi úměrnosti materiálu.**

---



*Mezní štíhlosti pro základní materiály nalezneme ve strojnických tabulkách. Je zde i litina (křehký materiál), pro kterou ovšem Eulerův výpočet také vyhovuje v příslušném rozsahu štíhlostí.*

#### **Příklad:**

Vypočítejte, jak velkou tlakovou silou můžeme zatížit dutý litinový sloup délky  $l = 2,5$  m s průměry  $D = 140$  mm a  $d = 100$  mm při bezpečnosti  $k = 5$  a modulu pružnosti  $E = 8,5 \cdot 10^4$  MPa, odpovídá-li uložení sloupu I. způsobu a předpokládáme-li pružný vzpěr. Dále vypočítejte napětí v tlaku.

#### **Řešení:**

Nejprve ověříme, zda se jedná o pružný vzpěr. Provedeme přípravné výpočty:

---

<sup>1</sup> V různých rovinách může mít vzpěra různé uložení, a tím i různou štíhlost; příkladem je ojnice, která je v rovině kyvu uložena ve dvou kloubech, v rovině kolmé se pak jedná o dvoji vetknutí (zde by byl na místě zmíněný přesnější výpočet počítající s nedokonalou tuhostí vetknutí).

<sup>2</sup> Případy, kdy se štíhlost blíží štíhlosti mezní, nejsou zcela jednoznačné. Vyžadují pravděpodobnostní řešení (práce s náhodnými veličinami).

$$S = \frac{\pi}{4}(D^2 - d^2) = \frac{\pi}{4}(140^2 \text{ mm}^2 - 100^2 \text{ mm}^2) = 7\,540 \text{ (mm}^2\text{)},$$

$$J = \frac{\pi}{64}(D^4 - d^4) = \frac{\pi}{64}(140^4 \text{ mm}^4 - 100^4 \text{ mm}^4) = 13\,948\,671 \text{ (mm}^4\text{)},$$

$$i = \sqrt{\frac{J}{S}} = \sqrt{\frac{13\,948\,671 \text{ mm}^4}{7\,540 \text{ mm}^2}} = 43 \text{ (mm)}.$$

Štíhlostní poměr:

$$\lambda = \frac{l_{red}}{i} = \frac{2l}{i} = \frac{2 \cdot 2\,500 \text{ mm}}{43 \text{ mm}} = 116.$$

Podle strojnických tabulek je mezní štíhlost litiny 80, jedná se tedy o pružný vzpěr ( $\lambda > \lambda_m$ ).

Maximální provozní síla  $F_{max} = F_{kr}/k$ :

$$F_{max} = \frac{\pi^2 \cdot EJ}{kl_{red}^2} = \frac{\pi^2 \cdot 8,5 \cdot 10^4 \text{ MPa} \cdot 13\,948\,671 \text{ mm}^4}{5 \cdot 5\,000^2 \text{ mm}^2} = \underline{93\,614 \text{ (N)}}.$$

Napětí v tlaku:

$$\sigma_d = \frac{F_{max}}{S} = \frac{93\,614 \text{ N}}{7\,540 \text{ mm}^2} = \underline{12,4 \text{ (MPa)}}.$$

### Nepružný vzpěr

Při nepružném vzpěru je štíhlost menší, než je mezní hodnota, ale větší, než když je prut namáhán prostým tlakem. V tom případě není vhodné používat Eulerovu rovnici. Existuje řada empirických vztahů pro výpočet.

---

**U nás se nejčastěji setkáváme s Tetmajerovou<sup>1</sup> rovnicí pro kritické napětí:**

$$\sigma_{kr} = a - b\lambda.$$

**Z něho můžeme určit kritickou sílu:**

$$F_{kr} = S\sigma_{kr}.$$

---

Konstanty  $a$ ,  $b$  mají různou velikost pro různé materiály, nalezneme je ve strojnických tabulkách.



*Tetmajerova rovnice je pouze rovnicí kontrolní, na rozdíl od Eulerovy rovnice z ní nemůžeme přímo navrhovat. Pro návrh využijeme buď Eulerovu rovnici, nebo rovnici*

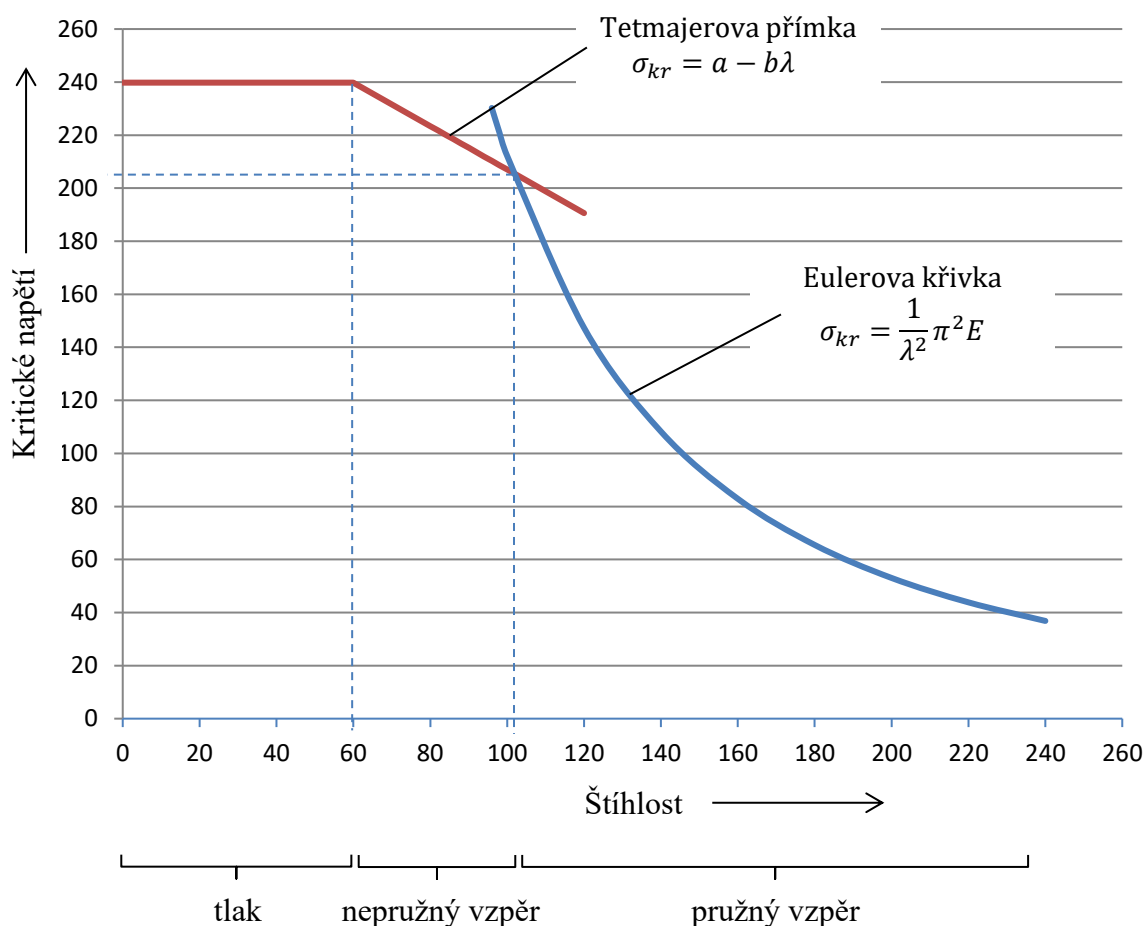
---

<sup>1</sup> Ludwig von Tetmajer (1850-1905), slovenský rodák, syn ředitele železárny. Profesor polytechniky v Curychu, průkopník zkoušek fyzikálních a mechanických vlastností konstrukčních materiálů. Až do doby jeho výzkumů se vzpěry navrhovaly pouze podle Eulerovy rovnice, což mělo někdy za následek zhroutení konstrukcí.

pro prostý tlak se sníženým dovoleným napětím a podle výsledku Tetmajerova výpočtu hodnoty korigujeme.

### Shrnutí

Výsledky výpočtů (Eulerova a Tetmajerova) shrneme do grafu (příklad pro ocel 11 370). Mezní štíhlost (přechod vzpěru pružného v nepružný) je přibližně 105, přechod nepružného vzpěru v prostý tlak nastává při štíhlosti přibližně 60 (hodnoty jsou orientační, složitost mezních případů byla zmíněna dříve).



Obr. 121



Graf je vytvořen v tabulkovém kalkulátoru pro ocel 11 370 (konstanty  $a = 289$ ,  $b = 0,82$ ). Podobný graf můžete sestavit pro jiné materiály a využít při řešení příkladů.

### Příklad:

Jsou dány trubkové vzpěry z oceli 11 370 o štíhlostech 40, 80, 120, 180 a průřezu  $S = 349 \text{ mm}^2$ . Zjistěte kritická napětí, způsob namáhání a velikost kritické síly, při nastane porucha (vybočení, popř. porušení tlakem).

### Řešení:

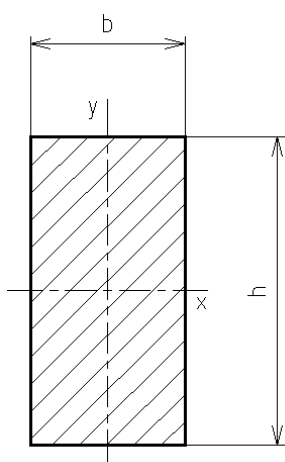
Kritická napětí pro jednotlivé štíhlosti získáme buď výpočtem ze vztahu  $\sigma_{kr} = a - b\lambda$ , nebo odečtením z grafu. Kritickou sílu vypočteme podle vztahu  $F_{kr} = S\sigma_{kr}$ . Výsledky jsou tabulkově uspořádány:

<b>Štíhlost</b>	40	80	120	180
<b>Kritické napětí (MPa)</b>	240	223	144	64
<b>Způsob namáhání</b>	tlak	nepružný vzpěr (vybočení s plastickou deformací)	pružný vzpěr (vybočení s pružnou deformací)	pružný vzpěr (vybočení s pružnou deformací)
<b>Kritická síla (kN)</b>	83,8	77,8	50,3	22,3

### Příklad:

Určete kritickou sílu a největší provozní sílu při bezpečnosti  $k = 10$  u přímé vzpěry, která je uložena tak, že v obou rovinách se jedná o IV. způsob uložení konců. Vzpěra je z oceli 11 423. Vzpěra má obdélníkový průřez o rozměrech  $b = 20$  mm,  $h = 40$  mm a délku  $l = 1$  m.

### Řešení:



Nejprve provedeme pomocné výpočty. Protože je vzpěra uložena v obou rovinách stejně, k vybočení dojde kolem osy  $y$  obdélníkového průřezu.

$$S = bh = 20 \text{ mm} \cdot 40 \text{ mm} = 800 \text{ (mm}^2\text{)},$$

$$J_y = \frac{b^3 h}{12} = \frac{20^3 \text{ mm}^3 \cdot 40 \text{ mm}}{12} = 26\,666,7 \text{ (mm}^4\text{)},$$

$$i_y = \sqrt{\frac{J_y}{S}} = \sqrt{\frac{26\,666,7 \text{ mm}^4}{800 \text{ mm}^2}} = 5,8 \text{ (mm)}.$$

Obr. 122

Protože redukovaná délka je rovna polovině délky vzpěry (IV. způsob uložení), bude štíhlost

$$\lambda = \frac{l_{red}}{i_y} = \frac{500 \text{ mm}}{5,8 \text{ mm}} = 86,2 \text{ (nepružný vzpěr)}.$$

Kritické napětí a kritická síla:

$$\sigma_{kr} = a - b\lambda = 289 - 0,82 \cdot 86,2 = 218,3 \text{ (MPa)}, \quad F_{kr} = S\sigma_{kr} = 800 \text{ mm}^2 \cdot 218,3 \text{ MPa} = \underline{174\,640 \text{ (N)}}.$$

Největší provozní síla:

$$F_{max} = \frac{F_{kr}}{k} = \frac{174\,640 \text{ N}}{10} = \underline{17\,464 \text{ (N)}}.$$



*Jak bylo dříve uvedeno v poznámce pod čarou, je dokonalé vetknutí spíše teoretickým případem, ve skutečnosti se osa prutu mírně natočí. V tom případě budeme počítat s větší redukovanou délkou<sup>1</sup>.*

<sup>1</sup> Podle SHIGLEY, J. E. aj. *Konstruování strojních součástí*. Viz použitá literatura.

### Korigovaný výpočet:

$$l_{red} = \frac{l}{\sqrt{1,2}} = \frac{1\,000\text{ mm}}{\sqrt{1,2}} = 913\text{ (mm)}.$$

$$\lambda = \frac{l_{red}}{i_y} = \frac{913\text{ mm}}{5,8\text{ mm}} = 157,4\text{ (pružný vzpěr)}.$$

Podle Eulera:

$$F_{kr} = \frac{\pi^2 \cdot EJ}{l_{red}^2} = \frac{\pi^2 \cdot 2,1 \cdot 10^5\text{ MPa} \cdot 26\,666,7\text{ mm}^4}{913^2\text{ mm}^2} = 66\,305\text{ (N)}.$$

$$F_{max} = \frac{F_{kr}}{k} = \frac{66\,305\text{ N}}{10} = \underline{6\,630,5\text{ (N)}}.$$



*Správnost řešení závisí na citlivém posouzení konkrétního případu, volbě součinitele bezpečnosti, zkušenostech a erudici konstruktéra a případném použití dalších metod.*

### Výpočet pomocí součinitele vzpěrnosti

Pro výpočty vzpěr příhradových konstrukcí se nepoužívají předchozí výpočtové metody, ale je normou předepsána metodika, která je optimalizována pro tento typ konstrukcí. Protože se jedná o podrobnou a obsáhlou normu a uvedené výpočty jsou záležitostí specialistů, uvedeme jen základní údaje.

---

**Při výpočtu se používá rovnice podobná pevnostní rovnici pro prostý tlak, síla je ale zvětšena vynásobením součinitelem vzpěrnosti  $c$  větším než 1. Součinitel vzpěrnosti je odvozen z požadavku, aby míra bezpečnosti v pružné i nepružné oblasti byla stejná jako míra bezpečnosti v tlaku.**

---

$$k \geq \frac{R_{ed}}{\sigma_{Dd}} = \frac{S\sigma_{kr}}{F},$$

$$F \cdot \frac{R_{ed}}{\sigma_{kr}} \leq S\sigma_{Dd},$$

kde poměr meze kluzu (nebo pevnosti) a napětí na mezi vzpěrné pevnosti (kritické napětí) určuje součinitel vzpěrnosti:

$$c = \frac{R_{ed}}{\sigma_{kr}}.$$

Vztah pak bude mít tvar

$$Fc \leq S\sigma_{Dd}$$

---

**a výpočtová rovnice:**

$$\sigma_{vz} = \frac{Fc}{S} \leq \sigma_{Dd}.$$

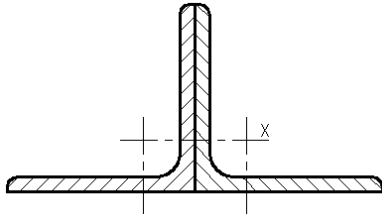
---



Hodnoty součinitele vzpěrnosti vyhledáme ve strojnických tabulkách. Připomeňme, že této metody se nepoužívá pro výpočet jiných strojních součástí než vzpěr příhradových konstrukcí, protože u nich je třeba volit míru bezpečnosti individuálně.

**Příklad:**

Vzpěra příhradové konstrukce má délku  $l = 1,75$  m a je zatížena silou  $F = 370,8 \cdot 10^3$  N. Skládá se ze dvou úhelníků z oceli 10 370. Navrhněte velikost úhelníku, připouští-li se napětí 150 MPa.



Obr. 123

**Řešení:**

Nejprve předběžně navrhne vzpěru např. z Eulerovy rovnice pro II. případ uložení a pro míru bezpečnosti<sup>1</sup>  $k = 3,5$ :

$$J_{min} = \frac{kFl_{red}^2}{\pi^2 E} = \frac{3,5 \cdot 370,8 \cdot 10^3 \text{ N} \cdot 1750^2 \text{ mm}^2}{\pi^2 \cdot 2,1 \cdot 10^5 \text{ MPa}} = 1917,6 \cdot 10^3 \text{ (mm}^4\text{)}.$$

Minimální kvadratický moment je vztažen k ose x a pro jeden profil je tedy poloviční, to jest  $958,8 \cdot 10^3 \text{ (mm}^4\text{)}$ . Tomu odpovídá profil L 100x100x6 ČSN 42 5541.01 s  $J_x = 111,47 \text{ cm}^4$ . Průřez  $S = 11,79 \text{ cm}^2$ , kvadratický poloměr (z tabulek)  $i = 3,07 \text{ cm}$ .

Pro složený profil zůstane kvadratický poloměr stejný (kvadratický moment i průřez ve vztahu násobíme dvěma).

Štíhlost:

$$\lambda = \frac{l}{i} = \frac{1750 \text{ mm}}{30,7 \text{ mm}} = 57.$$

Součinitel vzpěrnosti (strojnické tabulky)  $c = 1,22$  (přibližně interpolací).

Napětí ve vzpěře (z uvedené výpočtové rovnice):

$$\sigma_{vz} = \frac{Fc}{2S} = \frac{370,8 \cdot 10^3 \text{ N} \cdot 1,22}{2 \cdot 1179 \text{ mm}^2} = 192 \text{ (MPa)}.$$

Napětí je větší než dovolené, proto musíme výpočet opakovat, volíme větší úhelník L 100x100x8.  $J = 145,28 \text{ cm}^4$ ,  $S = 15,51 \text{ cm}^2$ ,  $i = 3,06 \text{ cm}$ .

Štíhlost:

$$\lambda = \frac{l}{i} = \frac{1750 \text{ mm}}{30,6 \text{ mm}} = 57,2.$$

Součinitel vzpěrnosti ponecháme 1,22 a napětí ve vzpěře bude:

$$\sigma_{vz} = \frac{Fc}{2S} = \frac{370,8 \cdot 10^3 \text{ N} \cdot 1,22}{2 \cdot 1551 \text{ mm}^2} = 145,8 \text{ (MPa)} < \sigma_{Dd}. \text{ Navržená vzpěra vyhovuje.}$$

<sup>1</sup> Míru bezpečnosti volíme odhadem a výpočet případně zkorigujeme.



***Otázky a úkoly:***

1. Kolem které osy průřezu prut vybočí, je-li ve všech rovinách stejné uložení konců?
2. Charakterizujte pružný a nepružný vzpěr.
3. Jaký vliv má pevnost materiálu na namáhání na vzpěr?
4. Jak poznáme u navržené vzpěry, zda bude namáhána pružným nebo nepružným vzpěrem, případně prostým tlakem?
5. Sestrojte pomocí tabulkového kalkulátoru diagram závislosti kritického napětí na štíhlost vzpěry pro určitý materiál (využijte strojnických tabulek).

## 18. POUŽITÁ LITERATURA

BINDER, R. *Mechanika 1 pro 1. ročník SPŠ strojnických*. 1. vyd. Praha : SNTL, 1988.

BINDER, R. *Mechanika 2 pro 2. ročník SPŠ strojnických*. 1. vyd. Praha : SNTL, 1989.

JEČMÍNEK, J. *Technická mechanika. Díl třetí – Pružnost a pevnost*. 5. vyd. Praha : SNTL, 1957.

KUNC, A., ZIMA, J., WANNER, J. *Mechanika II. Pružnost a pevnost*. 4. vyd. Praha : SNTL, 1961.

OUWEHAND, J., DROST, A. *Werktuigbouwkunde voor het MTO. Sterkteleer*. B. V. Uitgeverij Nijgh & Van Ditmar, Rijswijk, The Netherlands, 1987.

SALABA, S. *Stanovení druhu namáhání. Programovaný učební text pro žáky stř. prům. škol*. 1. vyd. Praha : SPN, 1973.

SHIGLEY, J. E., MISCHKE, CH. R., BUDYNAS, R. G. *Konstruování strojních součástí*. 1. čes. vyd. Brno : VUTIUM, 2010.

TUREK, I. aj. *Sbírka úloh z mechaniky*. Praha : SNTL, 1975.

TVRZSKÝ, J. *Mechanika. Učební text pro 2. roč. stř. prům. škol elektrotechnických*. 3. vyd. Praha : SNTL, 1965.