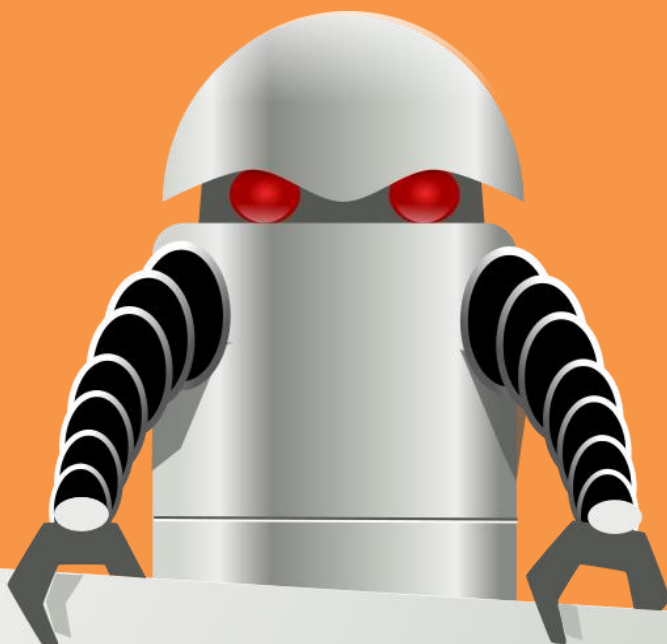


STŘEDNÍ PRŮMYSLOVÁ ŠKOLA STROJNICKÁ A STŘEDNÍ ODBORNÁ ŠKOLA  
PROFESORA ŠVEJCARA, PLZEŇ, KLATOVSKÁ 109



**Josef Gruber**

# **MECHANIKA I**

## **STATIKA**

Vytvořeno v rámci Operačního programu Vzdělávání pro konkurenceschopnost  
CZ.1.07/1.1.30/01.0038 Automatizace výrobních procesů ve strojírenství  
a řemeslech



INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ



Dílo podléhá licenci Creative Commons Uveďte autora-Nevyživejte dílo komerčně-Zachovejte licenci 3.0 Česko.



# OBSAH

ZÁKLADNÍ POJMY MECHANIKY .....	4
OPAKOVÁNÍ ZÁKLADNÍCH POZNATKŮ Z MATEMATIKY .....	6
STATIKA TUHÝCH TĚLES .....	10
1. Předmět statiky, síla .....	10
2. Skládání dvou různoběžných sil, rozklad síly .....	13
3. Moment síly, silová dvojice, přeložení síly .....	16
4. Silová soustava, druhy silových soustav .....	19
5. Rovinná soustava sil působící v téže vektorové přímce .....	20
6. Soustava sil, jejichž vektorové přímky procházejí společným bodem .....	24
7. Výslednice obecné soustavy sil .....	31
8. Rovnováha obecné soustavy sil .....	40
9. Těžiště se zaměřením na těžiště čar a ploch .....	49
10. Prutové soustavy .....	58
11. Statika pasivních odporů (tření) .....	65
POUŽITÁ LITERATURA .....	77



# ZÁKLADNÍ POJMY MECHANIKY

Obsah této kapitoly:

- *Předmět a rozdělení mechaniky*
- *Důležité pojmy v mechanice*
- *Newtonovy pohybové zákony*
- *Vztah mezi hmotností a tíhovou silou*
- *Měrné jednotky a jejich důležité násobky*

## Předmět a rozdělení mechaniky

**Mechanika** je část fyziky, která pojednává o mechanickém pohybu a rovnováze těles, o jejich vzájemném působení. **Technická mechanika** aplikuje fyzikální zákony na řešení konkrétních technických problémů.

Podle skupenství hmoty dělíme mechaniku na:

---

### 1. Mechaniku tuhých těles

### 2. Mechaniku tekutin (kapalin, plynů a par) a termomechaniku

---

Vedle toho tvoří zvláštní oddíl mechaniky také **nauka o pružnosti a pevnosti**, což je mechanika tuhých deformovatelných těles. Je základem pro návrh rozměrů strojních konstrukcí.

Mechaniku tuhých těles a mechaniku tekutin dělíme dále na **statiku, kinematiku a dynamiku**. Statika pojednává o rovnováze, kinematika o pohybu bez přihlídnutí k příčinám jeho změn a dynamika vyšetřuje pohyb s ohledem na příčiny pohybových změn (síly). **Termomechanika** pojednává o tepelné výměně mezi soustavami, její důležitou částí je termodynamika, která je základem nauky o tepelných strojích.

## Důležité pojmy v mechanice

**Hmotný bod:** těleso, u něhož neuvažujeme tvar a rozměry, ale připisujeme mu jistou hmotnost. V určitých případech je užitečným zjednodušením skutečného tělesa.

**Dokonale tuhé těleso:** těleso, které účinkem sil nemění svůj tvar (nedeformuje se).

**Osamělá síla:** opět zjednodušení, které nám usnadní výpočet, aniž bychom se při jeho použití dopustili chyb. Zatížení, které působí na malou plochu ve srovnání s ostatními rozměry soustavy.

**Skalární veličiny:** veličiny, které lze určit pouze velikostí (hmotnost, teplota, mechanická práce atd.). Škála = stupnice.

**Vektorové veličiny:** veličiny, k jejichž určení potřebujeme kromě velikosti také směr a smysl (směrové veličiny) – rychlost, síla atd. Značí se tučným řezem písma, nebo pruhem či šipkou nad označením.

**Mechanický pohyb:** přemísťování tělesa v prostoru nebo v rovině. Polohu tělesa popisujeme pomocí vhodného souřadného systému.



*Základní vlastností pohybu je relativnost. Při rozhodování o klidu či pohybu musíme tento stav vztáhnout k jinému tělesu (vztažné těleso, počátek souřadné soustavy), absolutní klid a pohyb neexistují. Srovnajte např. rychlost chůze ve vagónu vzhledem ke spolucestujícímu a vzhledem k trati.*

## Newtonovy pohybové zákony

**První pohybový zákon (zákon setrvačnosti)** – těleso setrvává v klidu nebo v rovnoměrném přímočarém pohybu, dokud není vlivem vnější síly nuceno tento svůj stav změnit.

**Druhý pohybový zákon (zákon síly)** – změna pohybu je úměrná zrychlující síle a má s ní stejný směr.

$$\mathbf{a} = \frac{\mathbf{F}}{m}, \text{ resp. } \mathbf{F} = m \cdot \mathbf{a}$$

**Třetí pohybový zákon (zákon akce a reakce)** – síly vzájemně působící mezi dvěma tělesy jsou stejně velké, opačné a kolineární (na společné nositelce).

$$\mathbf{F}_1 = -\mathbf{F}_2$$



Znaménko – v zákonu (principu) akce a reakce vyjadřuje, že se jedná o síly na různá tělesa, rovnice tedy není podmínkou rovnováhy.

## Vztah mezi hmotností a tíhovou silou

Hmotnost  $m$  – skalární veličina, míra množství látky.

Tíhová síla  $G$  – vektorová veličina (má směr a smysl), podle druhého pohybového zákona je

$$\mathbf{G} = m \cdot \mathbf{g}$$

$\mathbf{g}$  je tíhové zrychlení.

## Měrné jednotky a jejich důležité násobky

	Délka	Čas	Hmotnost	Síla
<b>V soustavě SI</b>	metr (m)	sekunda (s)	kilogram (kg)	newton ( $N = \frac{\text{kg}\cdot\text{m}}{\text{s}^2}$ )

	Exponenciální tvar	Předpona	Symbol
1 000 000 000	$10^9$	giga	G
1 000 000	$10^6$	mega	M
1 000	$10^3$	kilo	k
0,001	$10^{-3}$	mili	m
0,000 001	$10^{-6}$	mikro	$\mu$



**Zhodnoťte tvrzení: „správné – chybné“<sup>1</sup>?**

1. Hmotný bod je těleso zanedbatelného tvaru a rozměrů.
2. U dokonale tuhého tělesa neuvažujeme jeho tvar a rozměry.
3. Zrychlení je vektorová veličina.
4. Newtonovy pohybové zákony lze matematicky dokázat.
5. Tíhová síla nezávisí na poloze tělesa.

<sup>1</sup> 1. správné 2. chybné 3. správné 4. chybné 5. chybné



# OPAKOVÁNÍ ZÁKLADNÍCH POZNATKŮ Z MATEMATIKY

Obsah této kapitoly:

- Řešení lineárních algebraických rovnic
- Řešení soustav dvou rovnic o dvou neznámých
- Řešení kvadratických rovnic
- Vztahy mezi úhly
- Pravoúhlý trojúhelník
- Obvody a obsahy základních rovinných obrazců

## 🔊) Řešení lineárních algebraických rovnic

**Příklad:**

$$5 - x = 2x - 7$$

- členy s neznámou veličinou převedeme na levou stranu rovnice, členy bez neznámé na pravou stranu:

$$-x - 2x = -7 - 5$$

- obě strany sečteme a celou rovnici vynásobíme  $-1$ :

$$3x = 12$$

- pak je neznámá

$$x = 4$$

**Příklad:**

$$\frac{a}{x} = b$$

- rovnici vynásobíme neznámou:

$$a = bx$$

- rovnici vydělíme  $b$  a upravíme:

$$x = \frac{a}{b}$$

## 🔊) Řešení soustav dvou rovnic o dvou neznámých

**Příklad:**

$$x + 2y = 7$$

$$5x + 4y = 11$$

Řešení provedeme metodou dosazovací:

- z první rovnice vyjádříme jednu neznámou:

$$x = 7 - 2y$$

- dosadíme do druhé rovnice, tím obdržíme rovnici o jedné neznámé:

$$5(7 - 2y) + 4y = 11$$

$$35 - 6y = 11$$

$$y = 4$$

- z první rovnice vypočítáme druhou neznámou:

$$x = 7 - 2 \cdot 4 = -1$$

## 🔊) Řešení kvadratických rovnic

**Příklad:**

$$x^2 - 6x - 27 = 0$$

Řešení provedeme užitím vzorce pro řešení kvadratické rovnice:

$$\frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

- vypočítáme diskriminant:

$$D = b^2 - 4ac = 36 + 4 \cdot 27 = 144; \sqrt{D} = 12$$

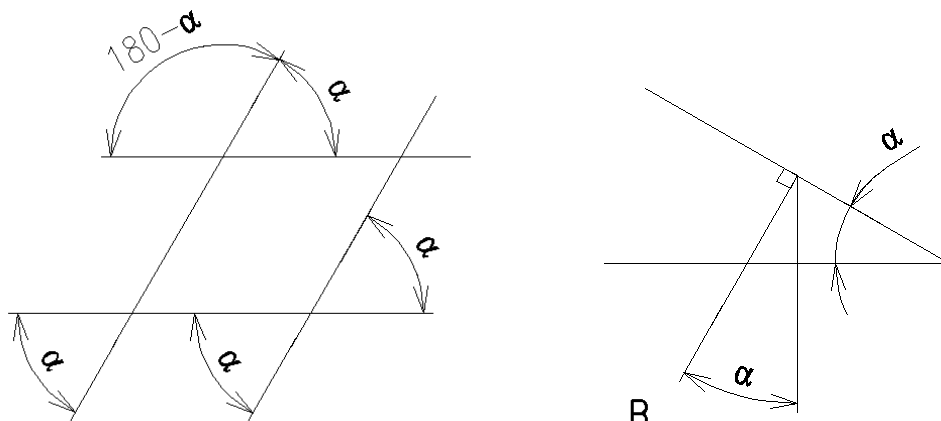
- řešíme kořeny rovnice:

$$\frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a} = \frac{6 \pm 12}{2}$$

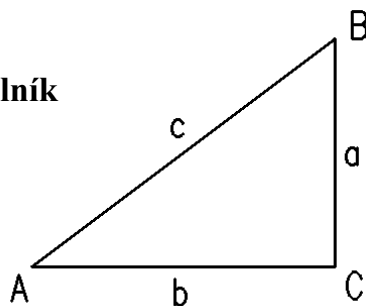
$$x_1 = 9; x_2 = -3$$

## 🔊) Vztahy mezi úhly

Průpravné úlohy např. pro rozkládání sil na nakloněné rovině:



## 🔊) Pravoúhlý trojúhelník



Pythagorova věta:

$$c^2 = a^2 + b^2$$
$$c = \sqrt{a^2 + b^2}$$

Základní goniometrické funkce:

$$\sin \alpha = \frac{\text{odvěsna protilehlá k úhlu } \alpha}{\text{přepona}}$$

$$\cos \alpha = \frac{\text{odvěsna přilehlá k úhlu } \alpha}{\text{přepona}}$$

$$\text{tg (tan)} \alpha = \frac{\text{odvěsna protilehlá k úhlu } \alpha}{\text{odvěsna přilehlá k úhlu } \alpha}$$

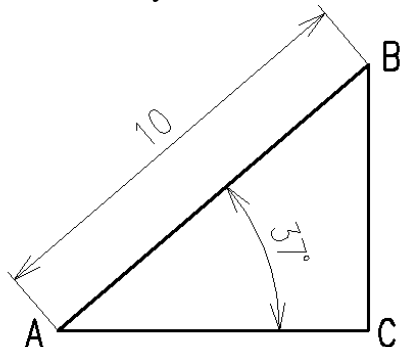


Pro výpočet hodnoty úhlu ze známé hodnoty goniometrické funkce použijeme na kalkulačce tlačítka  $\sin^{-1}$ ,  $\cos^{-1}$  a  $\tan^{-1}$ .

**Příklad:**

Výpočet neznámé strany v pravoúhlém trojúhelníku.

Vypočítejte strany AC a BC:

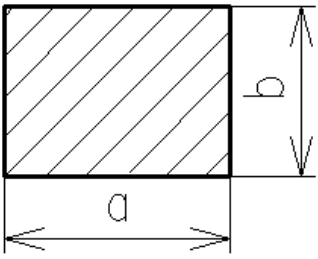
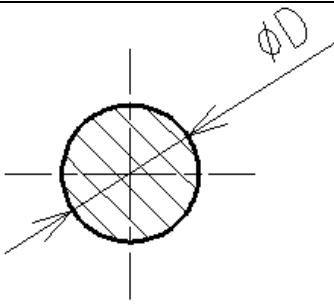
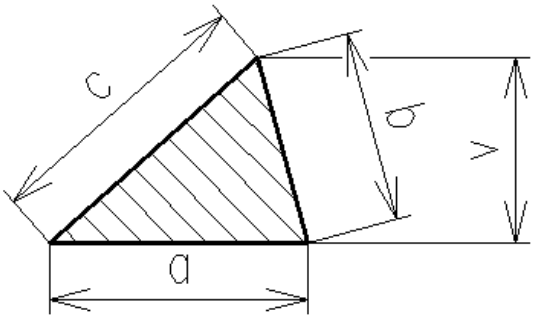


$$AC = 10 \cdot \cos 37^\circ = 7,986$$

$$BC = 10 \cdot \sin 37^\circ = 6,018$$

Tuto znalost využijeme při rozkladu síly do souřadných os – základní úloha při řešení silových soustav.

**Obvody a obsahy základních rovinných obrazců**

	$o = 2a + 2b$	$S = a \cdot b$
	$o = \pi \cdot D = 2\pi R$	$S = \frac{\pi \cdot D^2}{4}$
	$o = a + b + c$	$S = \frac{a \cdot v}{2}$





### Příklady:

1. Vypočítejte, na jakou plochu působí síla  $F$ , vyvolující měrný tlak  $p$ .  $F = 1\,500\text{ N}$ ,  $p = 0,6\text{ MPa}$  ( $1\text{ MPa} = 1\text{ N}\cdot\text{mm}^{-2}$ ).

$$p = \frac{F}{S}$$

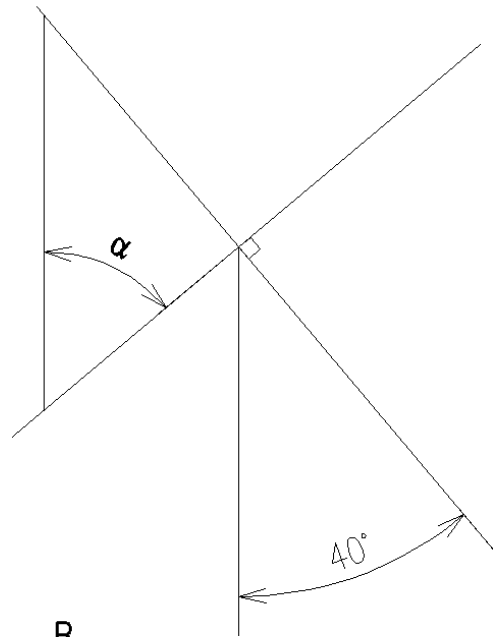
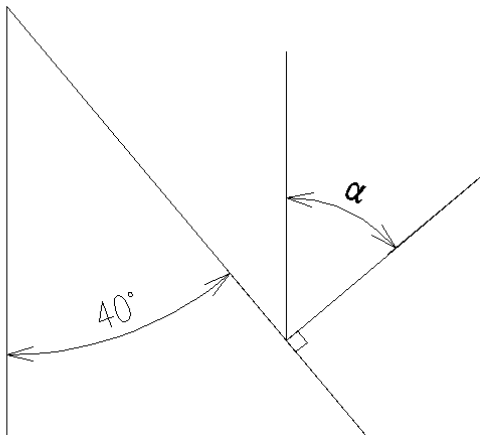
2. Řešte soustavu rovnic:

$$\begin{aligned}86x + 54y &= 150 \\23x + 45y &= -21\end{aligned}$$

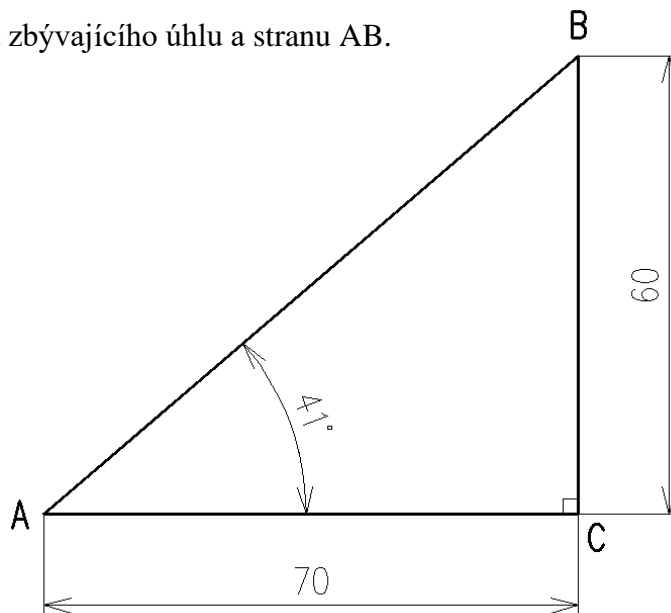
3. Upravte a řešte kvadratickou rovnici:

$$x^2 + x = 2$$

4. V obou případech určete velikost úhlu  $\alpha$ .



5. Určete velikost zbývajícího úhlu a stranu AB.



6. Pro budoucí pevnostní kontrolu vypočtete obsah průřezu hřídele o průměru  $D = 45\text{ mm}$ .

# STATIKA TUHÝCH TĚLES

## 1. PŘEDMĚT STATIKY, SÍLA

Obsah této kapitoly:

- Předmět statiky, základní úkoly
- Síla, zobrazení síly
- Základní operace se silami

### 🔊) Předmět statiky, základní úkoly

Statika zkoumá síly působící na těleso, které je v klidu, nebo se pohybuje rovnoměrně přímočaře (je tedy v rovnováze). Našimi základními úkoly budou:

1. Náhrada jedné silové soustavy soustavou ekvivalentní (nejčastěji jednou silou – výslednicí).

2. Řešení rovnováhy sil.

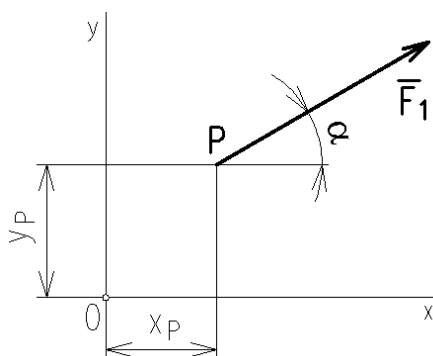
Pomocí metod statiky zjišťujeme zatížení strojních součástí i celých konstrukcí, čímž jsou umožněny následné pevnostní výpočty.

### 🔊) Síla, zobrazení síly

Základním pojmem statiky je **síla**. Síla je veličina, která vyjadřuje vzájemné působení těles. K jejímu úplnému určení nestačí znát velikost, potřebujeme též směr (směrový úhel), smysl a působiště. Síla tedy patří mezi **vektorové veličiny** (u veličin skalárních postačí udat velikost). Vektor síly je vázán k určité nositelce – vektorové přímce, po níž lze sílu posunout. Vektorové veličiny znázorňujeme orientovanými úsečkami („úsečka se šipkou“).



Obr. 1



Obr. 2

Protože na této úrovni vzdělávání nepracujeme s vektorovou analýzou, zapíšeme vektor síly takto:

$$\mathbf{F}_1 = [x_p; y_p; \alpha; F_1(N)].$$

$\mathbf{F}_1$ : označení vektoru síly (tučným řezem písma nebo pruhem či šipkou nad označením)

$x_p, y_p$ : souřadnice působiště (kladná poloosa  $x$  směřuje vpravo, kladná poloosa  $y$  nahoru)

$\alpha$ : směrový úhel (kladný proti smyslu pohybu hodinových ručiček)

$F_l$  (N): velikost síly v N či násobcích N (kN atd.)

Abychom mohli sílu nejen znázornit, ale také úlohy se silami graficky řešit, potřebujeme vztah mezi velikostí síly a délkou úsečky, která ji znázorňuje – tedy **měřítko sil**  $m_F$ . Měřítko musíme volit s ohledem na plochu, kterou máme pro zobrazení k dispozici.

$$m_F = \frac{F}{l} \text{ (N} \cdot \text{mm}^{-1}\text{)}.$$

**Příklad:**

Síla  $F = 8 \text{ kN}$  má být znázorněna úsečkou délky  $l = 40 \text{ mm}$ . Určete měřítko sil.

**Řešení:**

$$m_F = \frac{8\,000 \text{ N}}{40 \text{ mm}} = 200 \text{ (N} \cdot \text{mm}^{-1}\text{)}.$$

### Základní operace se silami

1. Posunutí síly: sílu je možno po její nositelce libovolně posunout bez dalších důsledků.
2. Skládání sil: náhrada několika sil silou jedinou – výslednicí.
3. Rozklad síly: náhrada síly dvěma složkami v zadaných směrech (velmi často se jedná o rozklad do směrů souřadných os).
4. Přeložení síly na rovnoběžnou nositelku: sílu není možno přeložit na rovnoběžnou nositelku bez dalších důsledků (vzniká navíc tzv. silová dvojice).

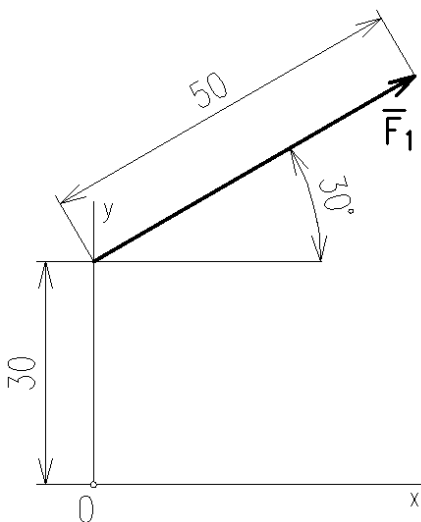
**Příklad:**

Znázorněte graficky síly:

$\vec{F}_1 = [0; 30; 30^\circ; 500 \text{ N}]$ ,  $m_F = 10 \text{ N} \cdot \text{mm}^{-1}$ ,

$\vec{F}_2 = [15; -10; -60^\circ; 8,2 \text{ kN}]$ , měřítko volte.

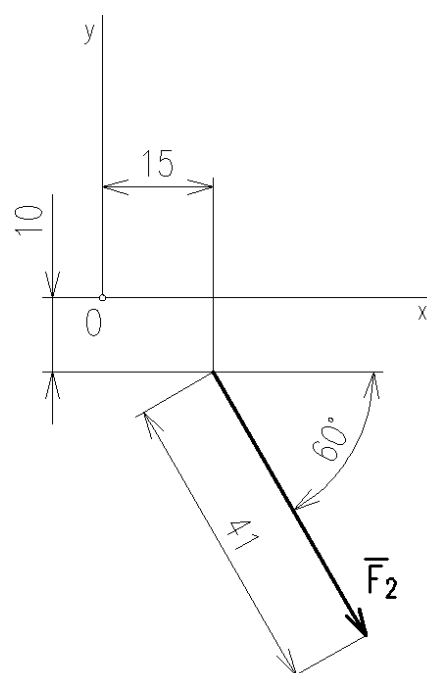
**Řešení:**



Obr. 3

Obr. 4

$$m_F = 200 \text{ (N} \cdot \text{mm}^{-1}\text{)}.$$





**Otázky:**

1. Tvrzení, že statika zkoumá pouze tělesa v klidu, je správné nebo chybné?
2. Které údaje potřebujeme k úplnému určení síly?
3. Lze sílu přeložit na jinou nositelku?
4. Jak velkou sílu zobrazuje úsečka délky 50 mm, je-li měřítko sil  $m_F = 0,3 \text{ N.mm}^{-1}$ ?

## 2. SKLÁDÁNÍ DVOU RŮZNOBĚŽNÝCH SIL, ROZKLAD SÍLY

Obsah této kapitoly:

- Princip grafického skládání dvou sil
- Rozklad síly do dvou různoběžných složek

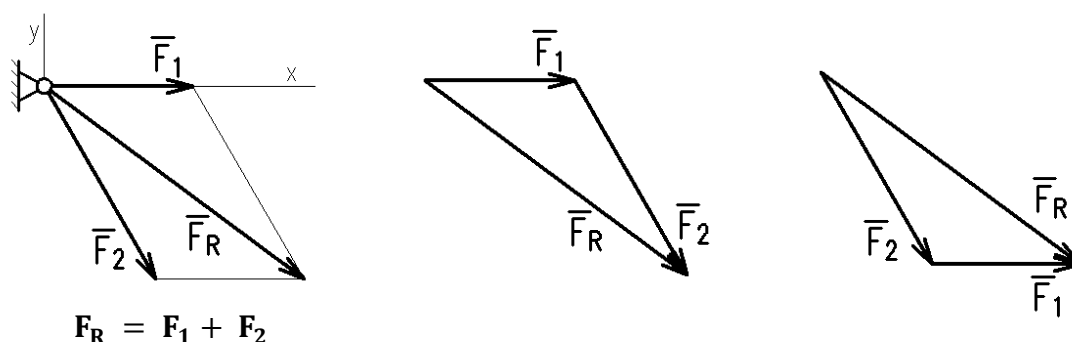
### 🔊) Skládání dvou různoběžných sil

V této části probereme pouze princip grafického skládání dvou různoběžných sil. Později se budeme věnovat jednotlivým silovým soustavám podrobněji.

---

**U dvou různoběžných sil lze vždy nalézt společné působiště; vzpomeňme si, že síly lze po jejich nositelkách posouvat. Síly skládáme vektorově (geometricky), výslednice tvoří úhlopříčku silového rovnoběžníku. Nepřehlédněte, že rovnice  $\vec{F}_R = \vec{F}_1 + \vec{F}_2$  je rovnicí vektorovou!**

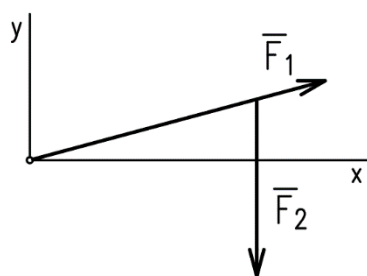
---



Obr. 5

Pro řešení technických úloh je praktičtější skládat síly pomocí **silového trojúhelníku**, který je libovolnou polovinou silového rovnoběžníku (při skládání nezáleží na pořadí sil, v jakém je řadíme za sebou).

#### Příklad:

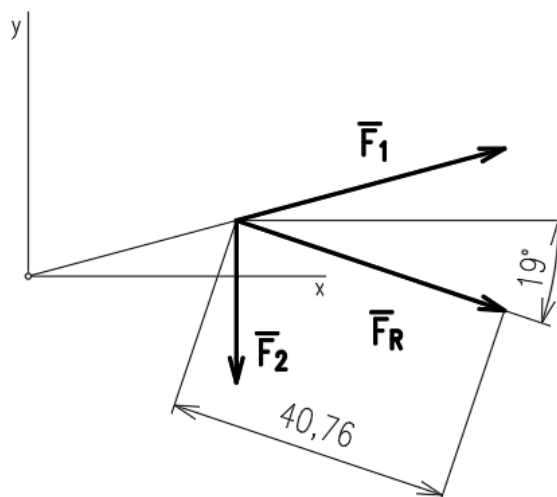


Graficky určete výslednici dvou sil:  $\vec{F}_1 = [0; 0; 15^\circ; 1\ 200\ \text{N}]$ ,  $\vec{F}_2 = [30; 10; -90^\circ; 700\ \text{N}]$ , měřítko sil  $m_F = 30\ \text{N.mm}^{-1}$ .

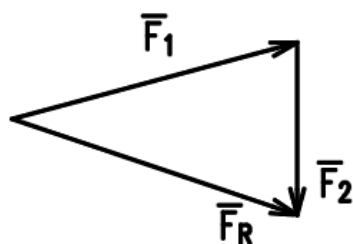
Obr. 6

#### Řešení:

Síly posuneme do společného působiště, přenesením rovnoběžek sestojíme silový trojúhelník a výslednici přeneseme do obrázku umístění. Změříme výslednici a pomocí měřítka sil vypočítáme její velikost a změříme směrový úhel výslednice.



Obr. 7



Obr. 8

$$F_R = 40,76 \cdot 30 = 1222,3 \text{ N.}$$

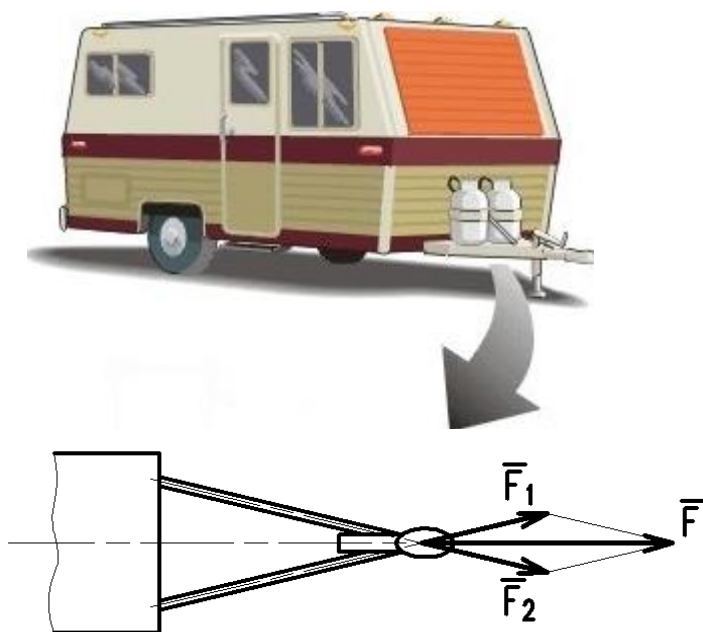
$$\alpha = -19^\circ.$$

### 🔊) Rozklad síly do dvou různoběžných složek

Probereme rozklad grafickou metodou a v případě rozkladu do dvou vzájemně kolmých směrů i metodou početní, protože se jedná o základní úlohu potřebnou i u početního způsobu skládání více sil.

#### a) grafické řešení

Jedná se o opačnou úlohu ke skládání dvou různoběžných sil. Koncovým bodem dané síly vedeme **rovnoběžky** se zadanými směry. Na obrázku rozkládáme sílu **F** do směrů táhel závěsu.



Obr. 9

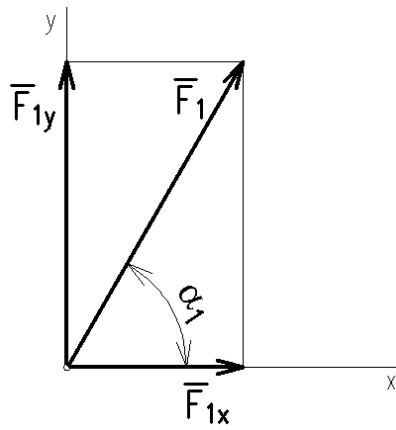


*Dejte pozor, abyste mechanicky nesestrojili kolmice – o ty se jedná pouze v případě, že zadané směry jsou vzájemně kolmé.*

#### b) početní řešení – rozklad do směrů souřadných os:

$$F_{1x} = F_1 \cdot \cos \alpha_1,$$

$$F_{1y} = F_1 \cdot \cos(90 - \alpha_1) = F_1 \cdot \sin \alpha_1.$$



Obr. 10



*Velikost složky získáme vynásobením velikosti síly kosinem přilehlého úhlu.*



**Příklady:**

1. Rozložte do souřadných os x,y graficky i početně sílu  $\mathbf{F} = [0; 0; 150^\circ; 250 \text{ N}]$ .
2. Ve dvou větvích lana, které spolu svírají úhel  $45^\circ$ , působí síly  $F_1 = F_2 = 4 \text{ kN}$ . Graficky určete výslednici. Použijte řešení silovým trojúhelníkem.

### 3. MOMENT SÍLY, SILOVÁ DVOJICE, PŘELOŽENÍ SÍLY

Obsah této kapitoly:

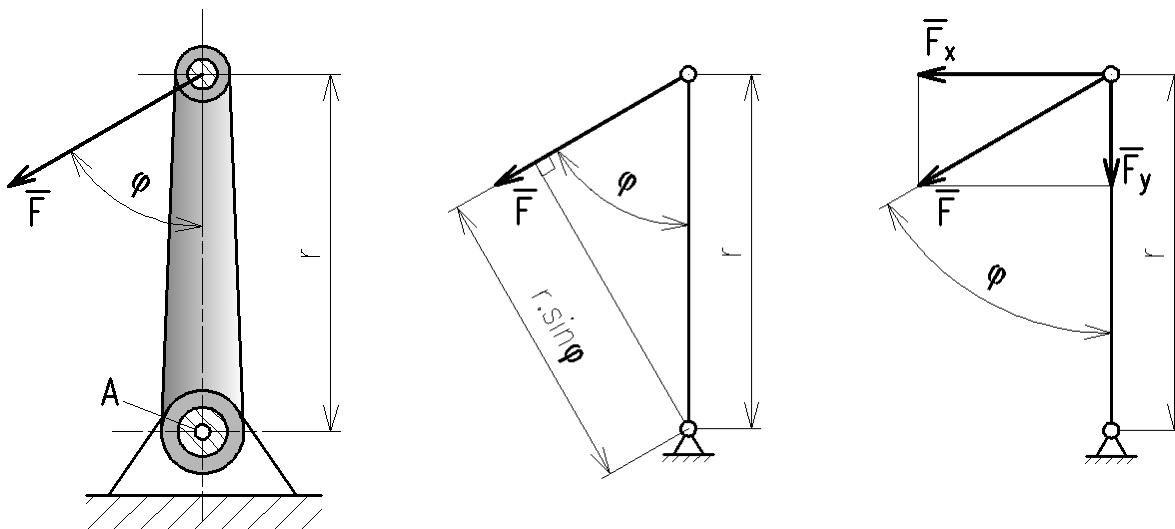
- Moment síly k bodu
- Silová dvojice
- Přeložení síly na rovnoběžnou nositelku

#### Moment síly k bodu

**Moment je veličina, která vyjadřuje velikost a směr otáčivého účinku síly. Je veličinou vektorovou. V základech středoškolské mechaniky však tuto skutečnost „obcházíme“ představou o smyslu otáčení soustavy a moment vyjadřujeme skalárně:**

$$M_A = F \cdot r \cdot \sin \varphi.$$

**Čteme: velikost momentu síly  $F$  k bodu  $A$  získáme vynásobením součinu velikosti síly a ramene sinem sevřeného úhlu. Jednotkou momentu je Nm (newtonmetr).**



Obr. 11

Všimněme si, že v uvedeném vztahu součin  $r \cdot \sin \varphi$  představuje kolmou vzdálenost síly od bodu otáčení, k němuž moment síly počítáme, zatímco součin  $F \cdot \sin \varphi$  vyjadřuje velikost složky síly  $F$  kolmé k zadanému rameni  $r$ . Moment můžeme vypočítat oběma způsoby.



Největší moment vyvine síla tehdy, když bude k páce kolmá ( $\sin 90^\circ = 1$ ).

Moment, který soustavou otáčí proti směru hodinových ručiček, považujeme většinou za kladný, moment otáčející soustavou ve směru hodinových ručiček pak za záporný<sup>1</sup>.

Jakýkoli moment je možno nahradit jiným stejně velkým momentem, změníme-li příslušně velikost síly i ramene.

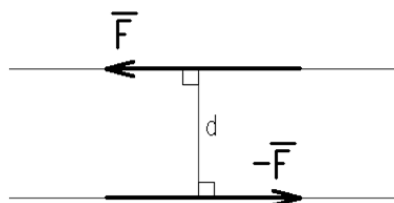
<sup>1</sup> Tato konvence vychází z vektorového součinu radiusvektoru  $r$  působíště a síly  $F$ ; kladný vektor momentu pak je kolmý k nákresně a směřuje k nám (podle pravidla pravé ruky).



## 🔊) Silová dvojice

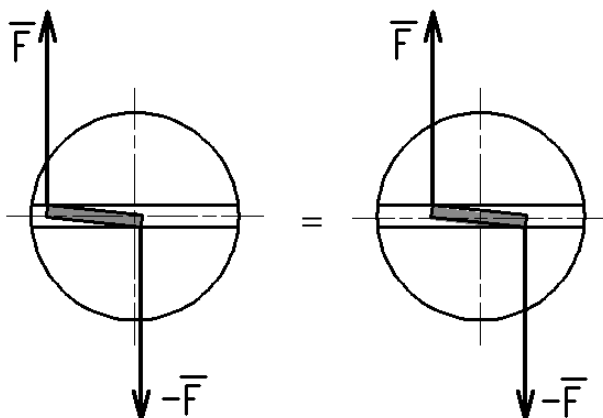
Silová dvojice je zvláštním případem soustavy sil. Je definována jako dvě rovnoběžné síly, které mají stejnou velikost a opačný smysl. Jejich nejkratší vzdálenost je  $d$ . Výslednice silové dvojice je nulová, dvojice má pouze otáčivý účinek vyjádřený momentem dvojice. Jeho velikost je

$$M = F \cdot d.$$



Obr. 12

Moment silové dvojice je volným vektorem, to znamená, že jeho účinek není závislý na poloze dvojice (moment dvojice je ke každému bodu její roviny stejný).



Obr. 13

Např. při nouzovém utahování šroubu příliš úzkým šroubovákem vyvodíme stejný účinek bez ohledu na polohu šroubováku v drážce.

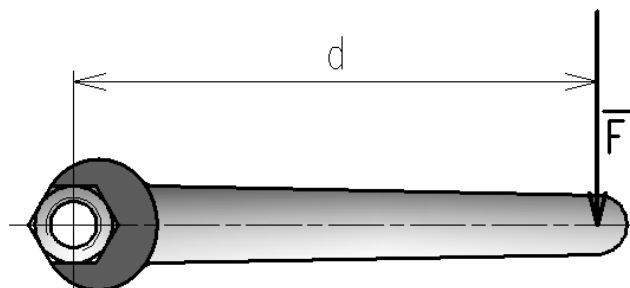
Dvojice sil je určena **rovinou, velikostí a smyslem**.

**Silovou dvojicí lze v její rovině:**

1. Libovolně posunout.
2. Pootočit.
3. Nahradit jinou dvojicí o stejně velkém momentu.
4. Přeložit do jiné rovnoběžné roviny.

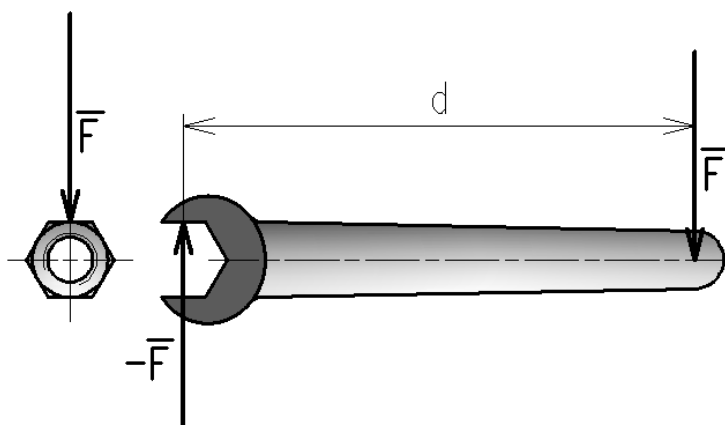
Několik dvojic v téže rovině lze nahradit jednou dvojicí, jejíž moment se rovná algebraickému součtu momentů jednotlivých dvojic. Podrobněji se tomu budeme věnovat v kapitole o obecné soustavě sil.

## Přeložení síly na rovnoběžnou nositelku



Obr. 14

Už bychom uměli vypočítat moment utahovací síly  $F$  ke středu matice. Teď si však povšimneme vzájemného působení klíče a matice. Přes rameno tuhého klíče se síla  $F$  přeloží na rovnoběžnou nositelku a působí na matici, zatímco na klíč působí reakce, která je podle třetího Newtonova zákona stejně velká a opačná. S původní silou  $F$  tak vytvoří dvojici působící na klíč.



Obr. 15

Přeložení síly na rovnoběžnou nositelku je doprovázeno vznikem silové dvojice. I účinek, který nazýváme moment síly k bodu, je tedy ve skutečnosti momentem silové dvojice.



*Při výpočtu momentu nezapomeňte, že velikost síly musíte vynásobit nejkratší (kolmou) vzdáleností obou nositelék.*



### **Otázky a úkoly:**

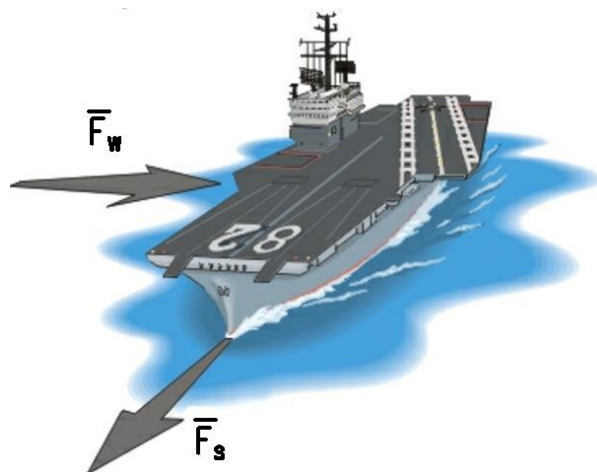
1. Co vyjadřuje moment síly? Je to skalární nebo vektorová veličina?
2. Jak se vypočítá moment síly k bodu?
3. Definujte dvojici sil.
4. Jak souvisí moment síly a moment dvojice s přeložením síly na rovnoběžnou nositelku?
5. Posuďte správnost tvrzení: moment dvojice k bodu P se liší od momentu téže dvojice k bodu R, který je různý od P.

## 4. SILOVÁ SOUSTAVA, DRUHY SILOVÝCH SOUSTAV

Obsah této kapitoly:

- Pojem silové soustavy
- Klasifikace (rozdělení) silových soustav

Působí-li na těleso více sil, pak hovoříme o silové soustavě (soustavě sil). Tyto soustavy mohou být rovinné nebo prostorové; v této učebnici se omezíme na rovinné soustavy. Budeme řešit jejich náhradu výslednicí a budeme se zabývat uvedením soustav do rovnováhy.



Na loď působí soustava dvou sil:

$\vec{F}_s$  – tažná síla šroubů,

$\vec{F}_w$  – síla větru.

Obr. 16

---

**Klasifikace rovinných soustav:**

1. Soustava sil působící v téže vektorové přímce (zvláštní případ soustavy se společným působištěm).
  2. Soustava sil, jejichž vektorové přímky procházejí společným bodem (soustava se společným působištěm).
  3. Obecná soustava sil (jejím zvláštním případem je soustava sil rovnoběžných)<sup>1</sup>.
- 

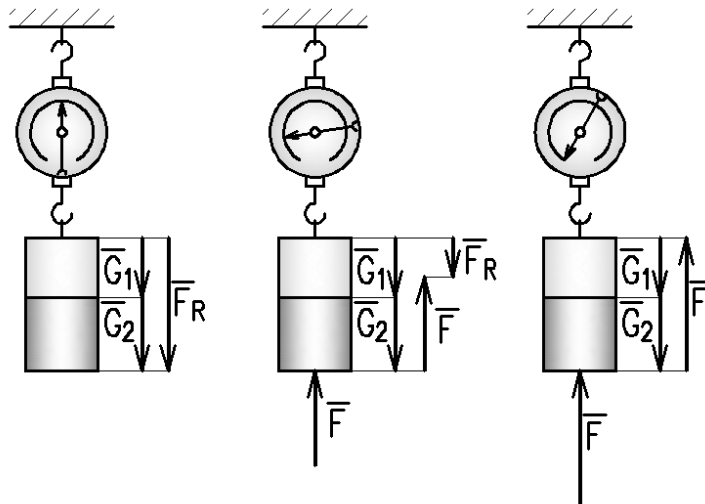
<sup>1</sup>Soustava rovnoběžných sil může být považována i za zvláštní případ soustavy se společným působištěm; průsečík nositelek pak je nevlastním bodem (tj. leží v nekonečnu).

## 5. ROVINNÁ SOUSTAVA SIL PŮSOBÍCÍ V TĚŽE VEKTOROVÉ PŘÍMCE

Obsah této kapitoly:

- Výslednice a rovnováha této silové soustavy
- Vazbové síly, první seznámení s metodou uvolňování

### Výslednice a rovnováha



Obr. 17

#### **Pokus:**

Na siloměr zavěsíme dvě závaží, jejich tíhy jsou  $G_1$  a  $G_2$ . Siloměr ukáže výslednou sílu  $F_R$  odpovídající součtu obou tíhových sil (velikost  $F_R = G_1 + G_2$ ). Potom nadlehčíme závaží silou  $F$  a siloměr ukáže menší výslednou sílu  $F_R = G_1 + G_2 - F$ . Nakonec nadlehčíme závaží silou, jejíž velikost odpovídá celkové tíhové síle a siloměr ukáže nulovou výchylku; účinky sil se vzájemně ruší, soustava  $G_1$ ,  $G_2$  a  $F$  je v rovnováze. Z tohoto pokusu plynou závěry pro výslednici a rovnováhu sil.

---

**Velikost výslednice sil působících v těze vektorové přímce se rovná algebraickému součtu<sup>1</sup> všech těchto sil:**

$$F_R = \sum_1^n F_i.$$

**Soustava sil působících v těze vektorové přímce je v rovnováze, jestliže jejich algebraický součet se rovná nule (velikost výslednice se rovná nule):**

$$F_R = \sum_1^n F_i = 0.$$



*Připomeňme, že síla je vektorová veličina a že algebraickou rovnicí  $F_R = G_1 + G_2 - F$  bychom zapsali vektorově jako  $\mathbf{F}_R = \mathbf{G}_1 + \mathbf{G}_2 + \mathbf{F}$ . Tato vektorová rovnice platí i pro různoběžné síly, které ovšem nelze sčítat algebraicky.*

---

<sup>1</sup> Algebraický součet je součet s ohledem na znaménko; obvykle přiřazujeme kladné znaménko silám působícím doprava (kladný smysl osy x) a nahoru (kladný smysl osy y). Symbol  $\Sigma$  (písmeno sigma velké řecké abecedy) čteme jako „suma“.

Úvodní obrázek naznačuje i **grafické řešení**. V dnešní době díky výpočetní technice ztrácejí grafická řešení na praktickém významu, ale jejich význam je neocenitelný pro názornost a dobrou představu o očekávaném výsledku.

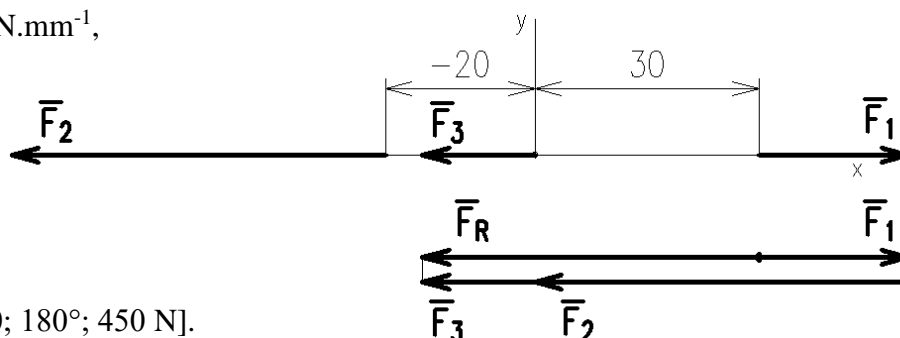
**Příklad:**

Jsou dány síly  $\mathbf{F}_1 = [30; 0; 0^\circ; 200 \text{ N}]$ ,  $\mathbf{F}_2 = [-20; 0; 180^\circ; 500 \text{ N}]$ ,  $\mathbf{F}_3 = [0; 0; 180^\circ; 150 \text{ N}]$ . Graficky i početně určete výslednici této soustavy.

**a) grafické řešení**

- volíme měřítko sil,
- volíme souřadný systém a síly zobrazíme,
- síly přeneseme a bez ohledu na pořadí složíme,
- sestrojíme výslednici a pomocí měřítka určíme její velikost.

$$m_F = 10 \text{ N} \cdot \text{mm}^{-1},$$



$$\mathbf{F}_R = [0; 0; 180^\circ; 450 \text{ N}].$$

Obr. 18

Vzhledem k možnosti sílu posunout je působíště výslednice kdekoli na ose  $x$ . Výslednici obdržíme, když spojíme počátek a konec soustavy, šipka výslednice směřuje k šipce poslední síly<sup>1</sup>.

**b) početní řešení**

$$F_R = \sum_1^n F_i.$$

Síle  $F_1$  přiřadíme kladné znaménko, silám  $F_2$  a  $F_3$  záporné znaménko:

$$F_R = F_1 - F_2 - F_3 = 200 - 500 - 150 = \underline{\underline{-450 \text{ (N)}}}.$$

Znaménko výslednice říká, že smysl výslednice bude shodný se smyslem sil  $F_2$  a  $F_3$ .

**Příklad:**

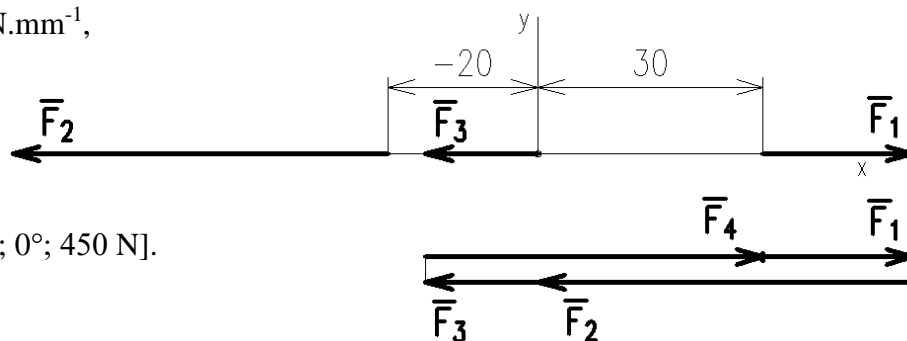
Určete sílu  $F_4$ , která uvede soustavu tří sil z minulého příkladu do rovnováhy.

**a) grafické řešení**

- volíme měřítko sil,
- volíme souřadný systém a síly zobrazíme,
- síly přeneseme a bez ohledu na pořadí složíme,
- sestrojíme hledanou sílu a pomocí měřítka určíme její velikost.

<sup>1</sup> Toto pravidlo bude platit i pro soustavu různoběžných sil.

$$m_F = 10 \text{ N}\cdot\text{mm}^{-1},$$



$$\mathbf{F}_4 = [0; 0; 0^\circ; 450 \text{ N}].$$

Obr. 19

Vzhledem k možnosti sílu posunout je působiště hledané síly kdekoli na ose  $x$ . Sílu, která uvede soustavu do rovnováhy, obdržíme, když spojíme počátek a konec soustavy, šipky silového obrazce jdou v jednom sledu.

### b) početní řešení

Pokud nemáme k dispozici grafické řešení, je nutno smysl hledané síly odhadnout a výsledek posoudit podle znaménka.

$$\sum_1^n F_i = 0.$$

Síle  $F_1$  přiřadíme kladné znaménko, silám  $F_2$  a  $F_3$  záporné znaménko:

$$F_1 - F_2 - F_3 + F_4 = 0; F_4 = F_2 + F_3 - F_1 = \underline{450 \text{ (N)}}.$$

Kladné znaménko síly  $F_4$  říká, že její smysl byl odhadnut správně.



*Nelze pokládat za chybu nesprávný odhad hledané síly (mnohdy to ani nejde, protože nemáme k dispozici zobrazení v měřítku), chybou je, pokud výsledek správně neposoudíme a případně neopravíme odhadnutý smysl.*

### Vazbové síly, metoda uvolňování

Vazbové síly jsou silami vzájemného působení mezi součástmi v sestavě. Jejich určení představuje jednu z nejdůležitějších úloh statiky, protože jsou „druhotnými vnějšími silami“, zatěžujícími součást vedle zadaného vnějšího zatížení, a potřebujeme je znát pro pevnostní výpočty.

---

**Vazbové síly určíme metodou uvolňování, což je základní metoda celé technické mechaniky. Vychází z třetího Newtonova zákona (princip akce a reakce)<sup>1</sup>.**

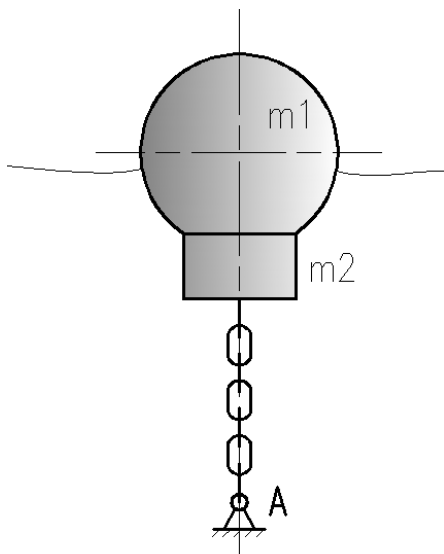
---

Podstatu metody uvolňování ukážeme na příkladu.

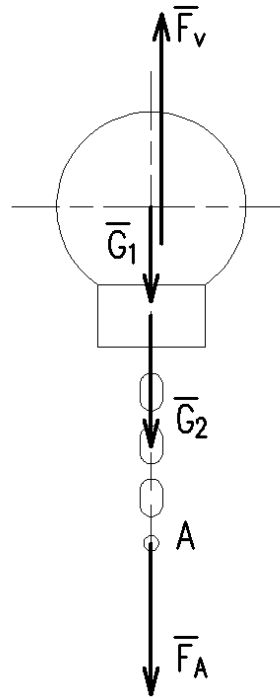
#### **Příklad:**

Bóje na moři je upevněna ke dnu řetězem. Proved'te analýzu silových poměrů a určete obecně vazbovou sílu v bodě A. Hmotnost řetězu pro zjednodušení neuvažujte. Bóje má hmotnost  $m_1$ , závaží  $m_2$  a na bóji působí známá vztlaková síla  $F_v$ .

<sup>1</sup> Správné uvolnění tělesa a určení působení sil je klíčem ke správnému řešení i při pevnostní analýze s pomocí počítače. Metoda uvolňování je tedy tím, co by si měl žák „odnést“ ze základů technické mechaniky na prvním místě, a její podstata bude v textu opakovaně připomínána.



Obr. 20  
Obr. 21



**Řešení metodou uvolňování:**

1. Těleso (bóji) uvolníme, tj. odstraníme vazby. V našem případě se jedná o vazbu A i o vodu, v níž je bóje ponořena.
2. Odstraněné vazby nahradíme vazbovými silami (reakcemi), které reprezentují účinky odstraněných těles. Tím obnovíme rovnováhu. V našem případě se jedná o síly  $F_A$  a  $F_v$ .

$$\sum_1^n F_i = 0,$$

$$F_v - G_1 - G_2 - F_A = 0; \quad F_A = F_v - G_1 - G_2.$$



*Bója působí **na dno** silou, která je výslednicí sil  $G_1$ ,  $G_2$  a  $F_v$ . Tato výsledná síla je stejně velká a opačná jako vazbová síla působící **na bóji**  $F_A$  (akce a reakce).*



**Příklady:**

1. Graficky i početně určete výslednici sil:  $\mathbf{F}_1 = [0; 0; 90^\circ; 3 \text{ kN}]$ ,  $\mathbf{F}_2 = [0; 10; -90^\circ; 2,2 \text{ kN}]$ ,  $\mathbf{F}_3 = [0; -20; 270^\circ; 1,3 \text{ kN}]$ ,  $\mathbf{F}_4 = [0; -30; -270^\circ; 4,2 \text{ kN}]$ .
2. Silou  $\mathbf{F}_4$  uveďte do rovnováhy soustavu sil:  $\mathbf{F}_1 = [0; 0; 0^\circ; 6 \text{ kN}]$ ,  $\mathbf{F}_2 = [10; 0; 180^\circ; 3,1 \text{ kN}]$ ,  $\mathbf{F}_3 = [-40; 0; 0^\circ; 8 \text{ kN}]$ .

## 6. SOUSTAVA SIL, JEJICHŽ VEKTOROVÉ PŘÍMKY PROCHÁZEJÍ SPOLEČNÝM BODEM

Obsah této kapitoly:

- Výslednice soustavy 3 a více sil
- Rovnováha tří sil
- Rovnováha více sil

### 🔊) Výslednice soustavy 3 a více sil

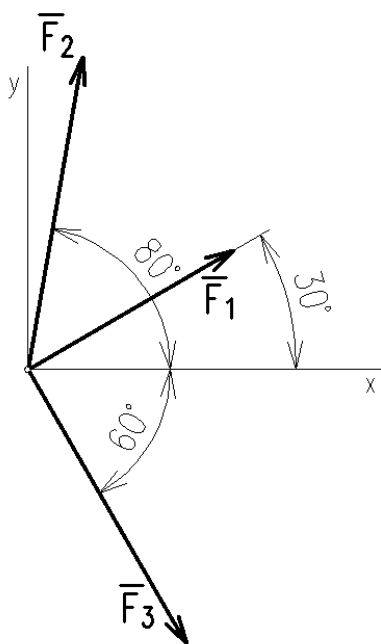
V návaznosti na skládání dvou sil probrané v rámci základních operací se silami ukážeme grafické a početní řešení výslednice soustavy více sil.

#### **Příklad:**

Určete výslednici sil působících v drátech elektrického vedení. Velikosti sil jsou  $F_1 = 1500$  N,  $F_2 = 2000$  N,  $F_3 = 2000$  N.

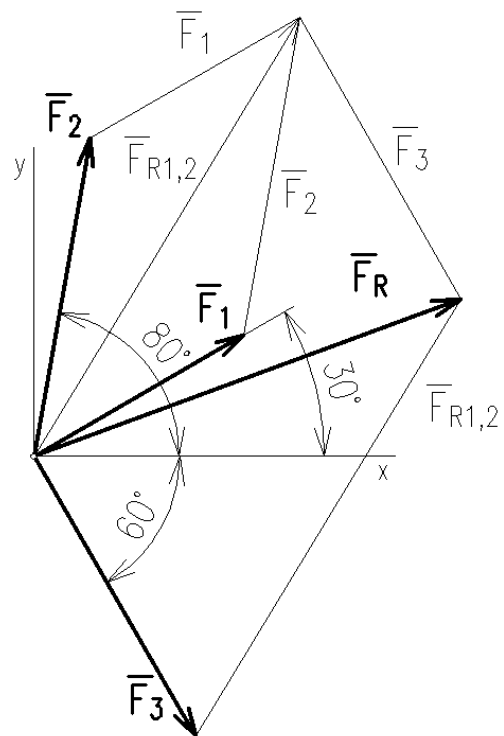
#### **a) grafické řešení**

$m_F = 50$  (N · mm<sup>-1</sup>).



Obr. 22

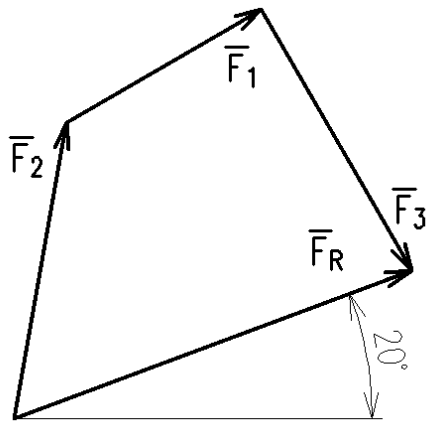
Obr. 23



Na prvním obrázku je tzv. postupné skládání, které nám ovšem poslouží pouze k odvození silového mnohoúhelníku (polygonu). Dvě síly (zde  $F_1$  a  $F_2$ , jinak nezáleží na pořadí) složíme do částečné výslednice  $F_{R1,2}$  a tuto částečnou výslednici složíme se silou  $F_3$ . Tím obdržíme výslednici soustavy  $F_R$ .

Z postupného skládání vidíme, že úsečky doplňující silové rovnoběžníky vytvoří silový mnohoúhelník (polygon). Ten sestojíme mimo obrázek umístění a výslednici do něho pouze přeneseme.





$$F_R = 2\,824,6 \text{ N}$$

Obr. 24

**Výslednici obdržíme, když spojíme počátek a konec soustavy, šipka výslednice směřuje k šipce poslední síly<sup>1</sup>.**



Nezapomeneme na začátku určit měřítko sil a na konci zapsat velikost a směrový úhel výslednice. Nejsou-li síly zadány ve společném působišti, do společného působiště je posuneme.

### b) početní řešení

Základem početního řešení je rozklad sil do složek ve směru souřadných os. Počátek souřadné soustavy volíme ve společném působišti sil. Složky indexujeme  $x$  nebo  $y$  ve shodě s osami.

$$F_{1x} = F_1 \cdot \cos 30^\circ,$$

$$F_{1y} = F_1 \cdot \sin 30^\circ,$$

$$F_{2x} = F_2 \cdot \cos 80^\circ,$$

$$F_{2y} = F_2 \cdot \sin 80^\circ,$$

$$F_{3x} = F_3 \cdot \cos 60^\circ,$$

$$F_{3y} = F_3 \cdot \sin 60^\circ.$$

Ze složek  $x$  – ových a  $y$  – ových dostaneme částečné výslednice:

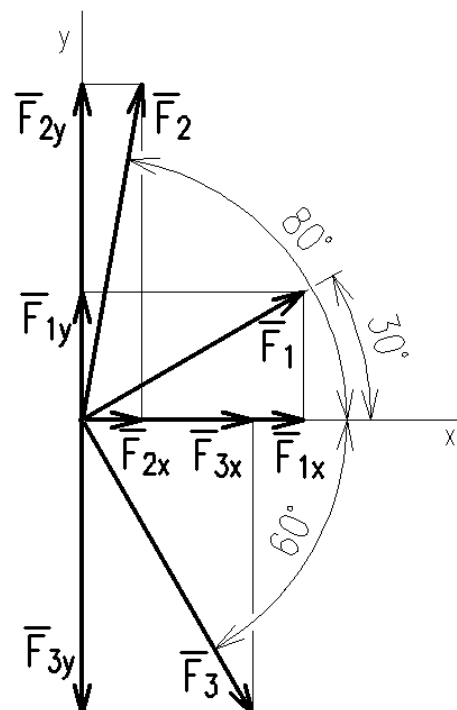
$$F_{Rx} = \sum F_{ix}:$$

$$F_{Rx} = F_1 \cdot \cos 30^\circ + F_2 \cdot \cos 80^\circ + F_3 \cdot \cos 60^\circ = \\ 1\,500 \cdot 0,866 + 2\,000 \cdot 0,174 + 2\,000 \cdot 0,5 = \\ 2\,646,3 \text{ (N)}$$

$$F_{Ry} = \sum F_{iy}:$$

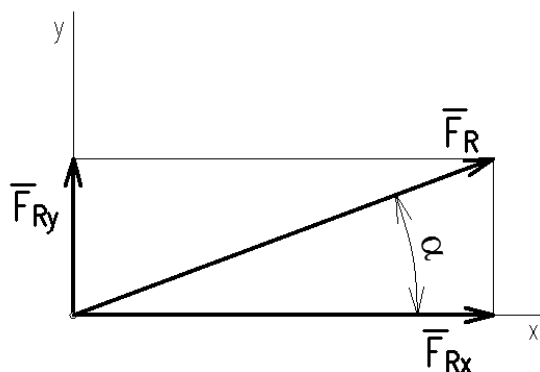
$$F_{Ry} = F_1 \cdot \sin 30^\circ + F_2 \cdot \sin 80^\circ - F_3 \cdot \sin 60^\circ = \\ 1\,500 \cdot 0,5 + 2\,000 \cdot 0,945 - 2\,000 \cdot 0,866 = \\ 987,6 \text{ (N)}$$

Obr. 25



Částečné výslednice složíme do výslednice celé soustavy (Pythagorovou větou) a vypočítáme směrový úhel výslednice.

<sup>1</sup> Viz pravidlo u soustavy sil působících na společné vektorové přímce.



Obr. 26

$$F_R = \sqrt{F_{Rx}^2 + F_{Ry}^2} = \sqrt{2646,3^2 + 987,6^2} = \underline{2\,824,6 \text{ (N)}}$$

$$\alpha = \tan^{-1} \frac{F_{Ry}}{F_{Rx}} = \tan^{-1} \frac{987,6}{2646,3} = \underline{20,47^\circ}$$



Všimněte si, že řešení příkladu se skládá ze základních dílčích úloh, které byly dosud probrány: výslednice sil se společnou vektorovou přímkou a výslednice dvou různoběžných (zde kolmých) sil.



### Rovnováha 3 sil



Soustava sil je v rovnováze, jestliže těleso, na které působí, se ani neposouvá (výslednice je rovna 0), ani neotáčí (výsledný moment je roven 0). Výsledný moment tří různoběžných sil bude roven 0 tehdy, jestliže nositelky sil budou procházet společným bodem. Výslednice bude rovna 0, jestliže rovnoběžně přenesené síly vytvoří trojúhelník se šipkami v jednom sledu. Pokud by síly vytvořily trojúhelník a jejich nositelky se neprotínaly, pak výslednice dvou sil vytvoří se třetí silou dvojici a soustava se bude otáčet.

Obr. 27

---

**Tři síly jsou v rovnováze, jestliže se jejich nositelky protínají ve společném bodě ( $\Sigma M_i = 0$ ) a rovnoběžně přenesené síly vytvoří uzavřený silový trojúhelník se šipkami v jednom sledu ( $\Sigma F_i = 0$ )<sup>1</sup>.**

---

Tento případ silové soustavy je velmi častý. Početní řešení je jednodušší, jestliže silový trojúhelník je rovnoramenný, rovnostranný nebo pravoúhlý (časté případy). Zadání úloh může být koncipováno tak, že společný bod vyplývá přímo z konfigurace soustavy, nebo musíme společný bod nejprve nalézt.



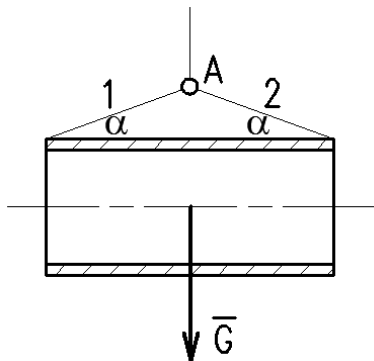
Při řešení úloh o rovnováze je základní metodou metoda uvolňování.

---

<sup>1</sup> Nezapomeňme, že v této souvislosti se jedná o vektorové rovnice.

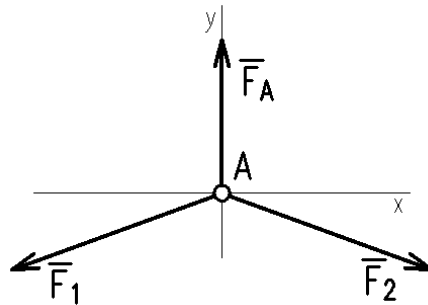
**Příklad:**

Na laně visí trubka o hmotnosti  $m = 400$  kg. Určete síly v lanech 1 a 2. Úhel  $\alpha = 20^\circ$ .



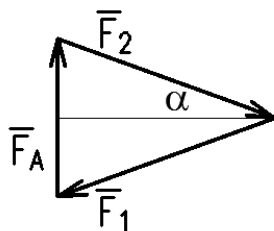
Obr. 28

**Grafické řešení** naznačíme bez měřítka. Nejprve uvolníme bod A (tj. zavedeme souřadný systém s počátkem v bodě A a zakreslíme předpokládaný smysl sil). Vazbová síla  $F_A$  je reakcí na sílu  $G$ , je stejně velká a má opačný smysl.



Obr. 29

Síly složíme tak, aby vytvořily uzavřený trojúhelník se šipkami v jednom sledu. Druhá podmínka rovnováhy je splněna zadáním (síly vycházejí ze společného působíště).



Obr. 30

Takto naznačené grafické řešení bude podkladem pro řešení početní. Rovnoramenný silový trojúhelník rozdělíme výškou na dva stejné pravoúhlé trojúhelníky, pro něž platí:

$$\sin \alpha = \frac{F_A}{2 \cdot F_{1,2}}$$

$$F_{1,2} = \frac{F_A}{2 \cdot \sin \alpha} = \frac{3924 \text{ N}}{2 \cdot \sin 20^\circ} = \underline{\underline{5\,736,5 \text{ (N)}}}$$

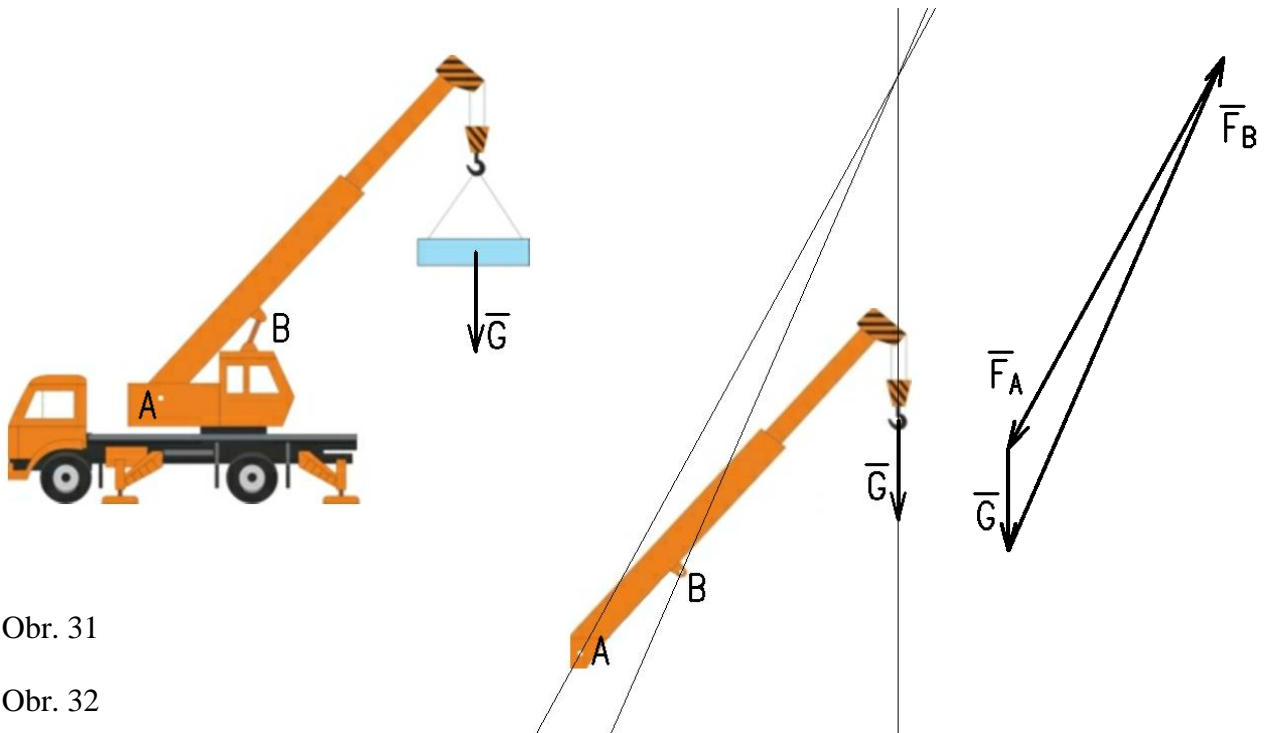
**Příklad:**

Formou náčrtu nalezněte společný bod sil působících na výložník autojeřábu a naznačte silový trojúhelník.

**Řešení:**

Aby soustava byla řešitelná, musíme u jedné neznámé síly znát **směr**. V našem případě to bude vazbová síla v bodě B: hydromotor (hydraulický válec) je na koncích kloubově uložen, a proto přenáší osovou sílu.

Následně výložník **uvolníme**, sestrojíme známé nositelky sil  $G$  a  $F_B$  a jejich průsečíkem musí procházet i vazbová síla  $F_A$ . Silový trojúhelník začneme sestrojovat přenesením známé síly  $G$  a rovnoběžek s nositelkami vazbových sil. Nezáleží na tom, kterým bodem síly  $G$  vedeme kterou rovnoběžku.



Obr. 31

Obr. 32

Obr. 33

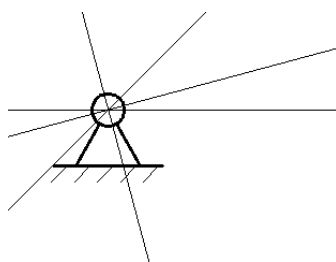
Počtení řešení lze provést například pomocí vztahů pro obecný trojúhelník (kosinová a sinová věta) nebo volbou počátku souřadné soustavy ve společném průsečíku nositelek, rozkladem sil do složek  $x$  – ových a  $y$  – ových a řešením podmínek rovnováhy  $\Sigma F_{ix} = 0$  a  $\Sigma F_{iy} = 0$  (viz kapitola Rovnováha více sil). Počtení řešení **pomocí momentových podmínek rovnováhy** bude ukázáno v kapitole o obecné soustavě sil.

---

**V příkladu jsme poznali dva druhy podpor: podpora A je tzv pevná kloubová podpora; pevná podpora může zachytit sílu v libovolném směru. Podpora B je volná podpora; u volné podpory známe směr hledané vazbové síly<sup>1</sup>.**

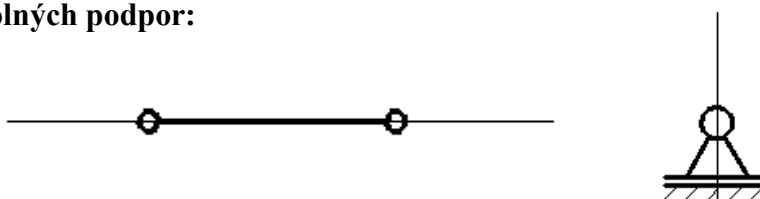
---

**Pevná kloubová podpora:**



Obr. 34

**Příklady volných podpor:**



Obr. 35

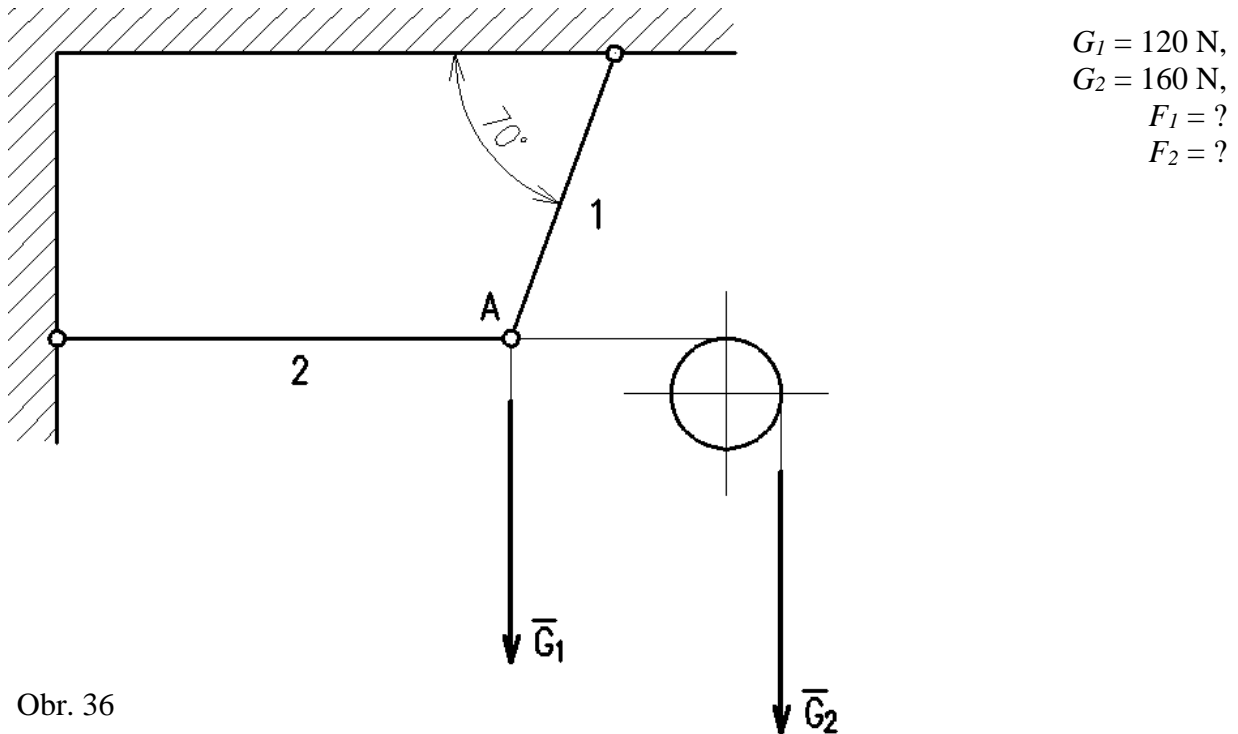
---

<sup>1</sup> Dvě pevné podpory by představovaly větší počet neznámých složek vazbových sil, než je počet statických podmínek rovnováhy. Takové soustavy jsou tzv. staticky neurčité a další rovnice sestavujeme metodami pružnosti a pevnosti (deformační podmínky).

## 🔊) Rovnováha více sil se společným působištěm

### Příklad:

Určete graficky i početně síly v prutech 1 a 2, je-li soustava zatížena dvěma břemeny a je v rovnováze.

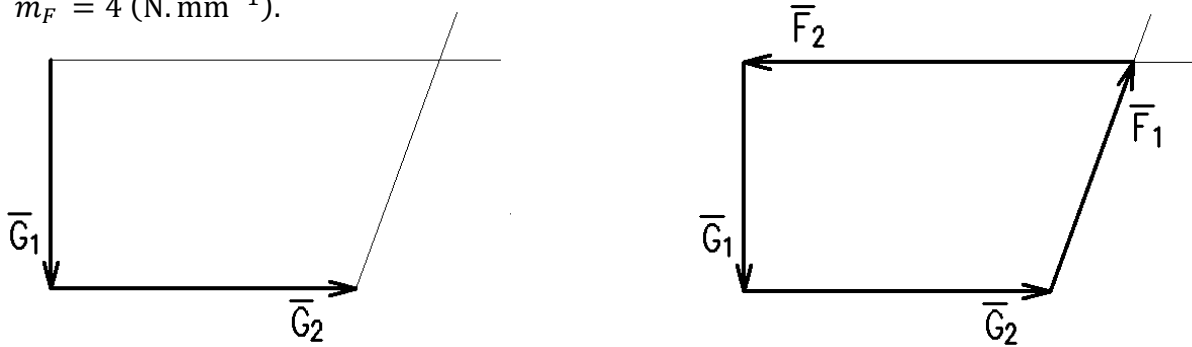


Obr. 36

### a) grafické řešení

Vyjdeme z podmínky, že výslednice musí být rovna 0, tedy síly musí vytvořit uzavřený mnohoúhelník se šipkami v jednom sledu. Síla  $G_2$  působí v bodě A vodorovně.

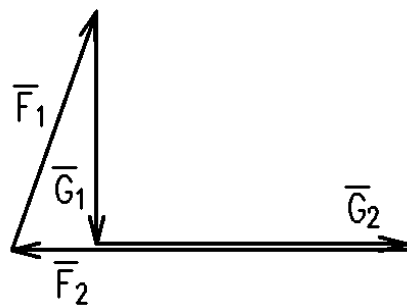
$$m_F = 4 \text{ (N} \cdot \text{mm}^{-1}\text{)}.$$



Obr. 37

Obr. 38

Obr. 39

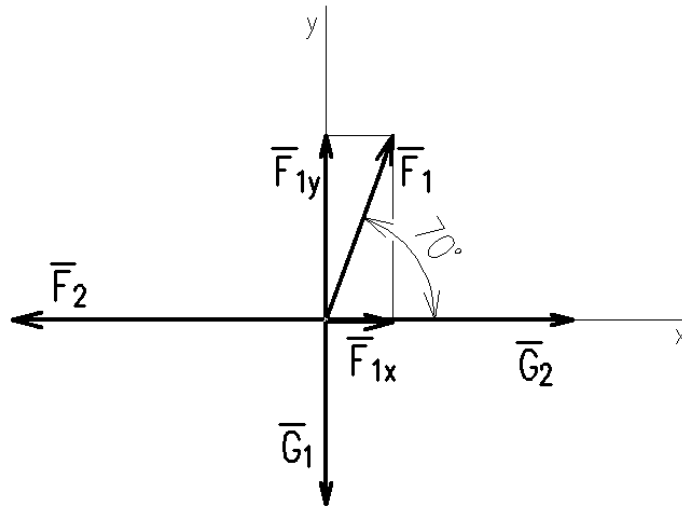


Soustavu doplníme rovnoběžkami s nositelkami neznámých sil, přiřadíme šipky. Na obrázcích jsou dvě možná řešení (nezáleží na pořadí sil).

**Výsledky:**  
 $F_1 = 127,7 \text{ N}$ ,  
 $F_2 = 203,6 \text{ N}$ .

**b) početní řešení**

Uvolníme bod A, počátek souřadné soustavy volíme v bodě A.



Obr. 40

$$F_{1x} = F_1 \cdot \cos 70^\circ$$

$$F_{1y} = F_1 \cdot \sin 70^\circ$$

$$\sum F_{ix} = 0: F_1 \cdot \cos 70^\circ + G_2 - F_2 = 0$$

$$\sum F_{iy} = 0: F_1 \cdot \sin 70^\circ - G_1 = 0$$

$$F_1 = \frac{G_1}{\sin 70^\circ} = \frac{120}{\sin 70^\circ} = \underline{127,7 \text{ (N)}}$$

$$F_2 = G_2 + F_1 \cdot \cos 70^\circ = 160 + 127,7 \cdot \cos 70^\circ = \underline{203,6 \text{ (N)}}$$



**Otázky a úkoly:**

1. Uveďte podmínky, za kterých je soustava tří sil v rovnováze.
2. Mohou být v rovnováze dvě různoběžné síly?
3. Vysvětlete podstatu metody uvolňování.
4. Vyhledejte na internetu příklad trémového mostu a posuďte jeho uložení (pevná a volná podpora).
5. Nakreslete od ruky silový trojúhelník pro zadní kyvnou vidlici elektrického kola z obrázku v úvodu.

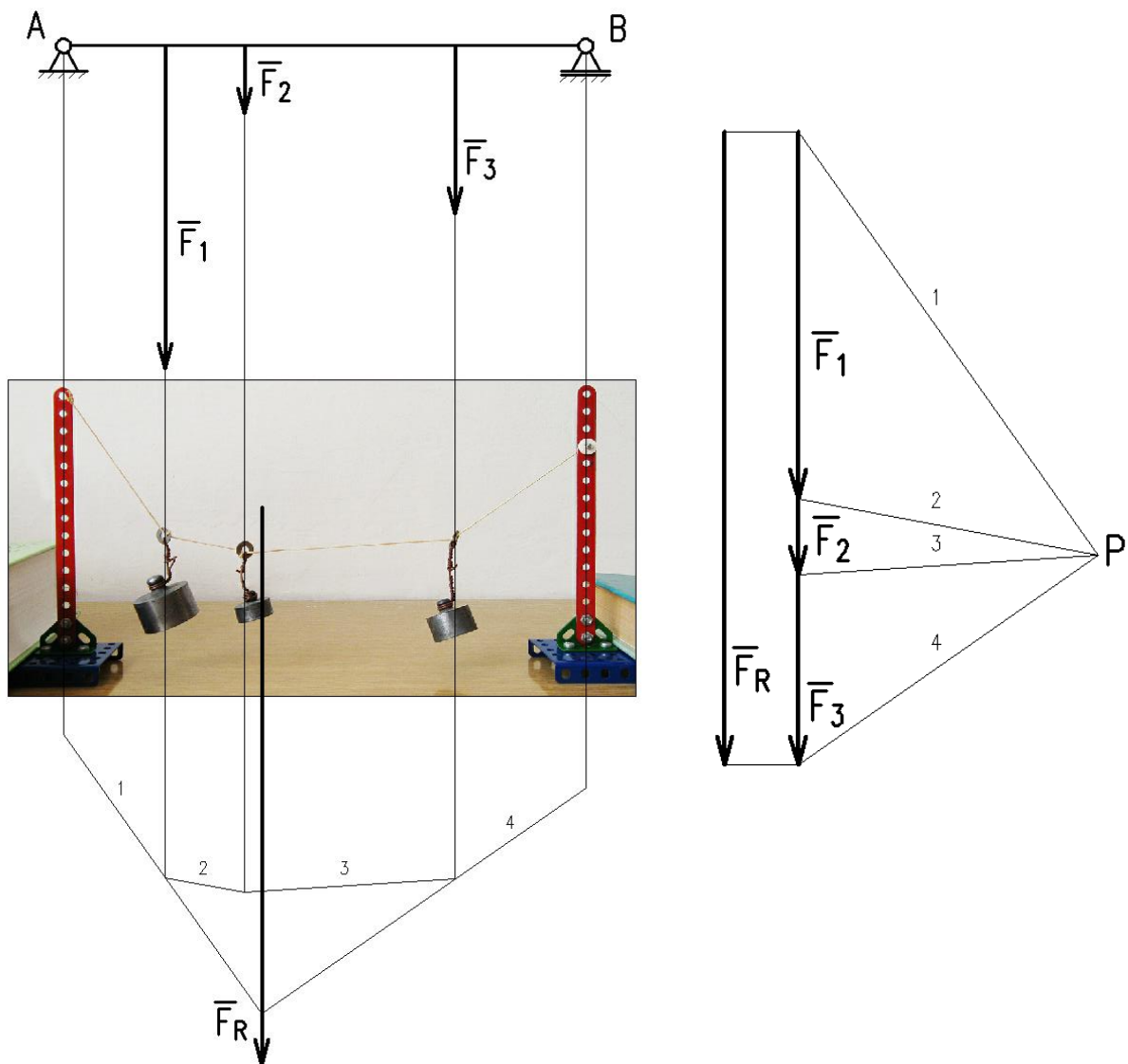
## 7. VÝSLEDNICE OBECNÉ SOUSTAVY SIL

Obsah této kapitoly:

- Grafické řešení výslednice obecné soustavy sil, metoda vláknového mnohoúhelníku
- Momentová věta
- Početní řešení výslednice obecné soustavy

### 🔊) Grafické řešení výslednice obecné soustavy sil, metoda vláknového mnohoúhelníku

Grafická metoda vláknového mnohoúhelníku vychází z představy, že dané síly působí na vlákno, v jehož uzlech se ustaví rovnováha tří sil. Každá větev vlákna je společná dvěma uzlům. Výslednice prochází průsečíkem krajních vláken. Protože vlákno je pouze prostředkem k nalezení výslednice, nezáleží na jeho tvaru a poloze a bod P – pól, v němž se stýkají silové trojúhelníky, můžeme volit libovolně. Rovnovážné síly ve větvích vlákna se ve vláknovém mnohoúhelníku protínají ve společném bodě, v pólovém obrazci pak tvoří uzavřené trojúhelníky.



Obr. 41

---

**Postup řešení:**

1. Zvolíme měřítko sil a délek a soustavu zobrazíme.
  2. Síly rovnoběžně přeneseme a složíme bez ohledu na pořadí
  3. Sestrojíme výslednici (spojíme počátek a konec soustavy, šipka výslednice směřuje k šipce poslední síly).
  4. Zvolíme pól P a sestrojíme silové trojúhelníky (propojíme pól s počátky a konci sil).
  5. Sestrojíme vlákno tak, že na nositelce první síly (v obrázku síla  $F_1$ ) zvolíme bod a vedeme jím rovnoběžky s první a druhou silou ve vlákne v pólovém obrazci (v obrázku síly – vlákna 1, 2). Pokračujeme dalšími silami – síly, které v pólovém obrazci tvoří trojúhelník, se ve vláknovém mnohoúhelníku protínají (v obrázku se vlákna 2,3 protínají na nositelce síly  $F_2$  atd.).
  6. Výslednice prochází průsečíkem prvního a posledního vlákna. Určíme její velikost a polohu od zvoleného bodu.
- 

Postup řešení se neliší, když nositelky sil nejsou rovnoběžné, ale obecně položené.

**Příklad:**

Graficky určete výslednici soustavy sil:

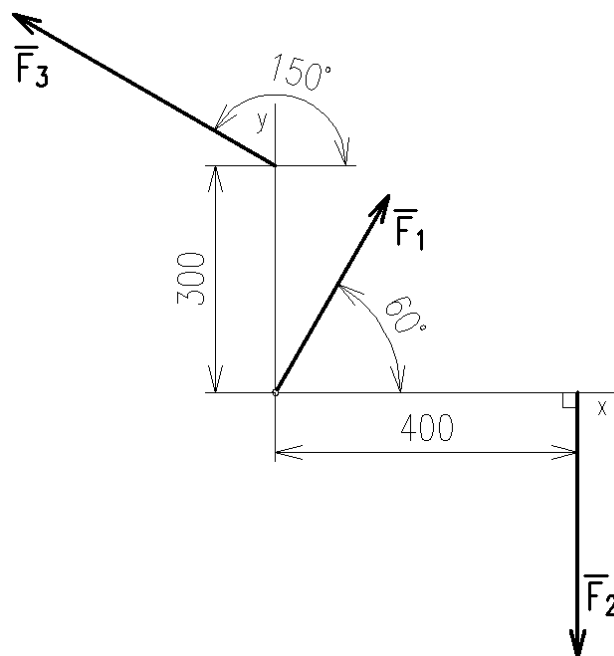
$$F_1 = 3 \text{ kN},$$

$$F_2 = 3,5 \text{ kN},$$

$$F_3 = 4 \text{ kN}.$$

$$m_F = 100 \text{ (N} \cdot \text{mm}^{-1}\text{)},$$

M 1 : 10 (rozměry jsou v milimetrech).



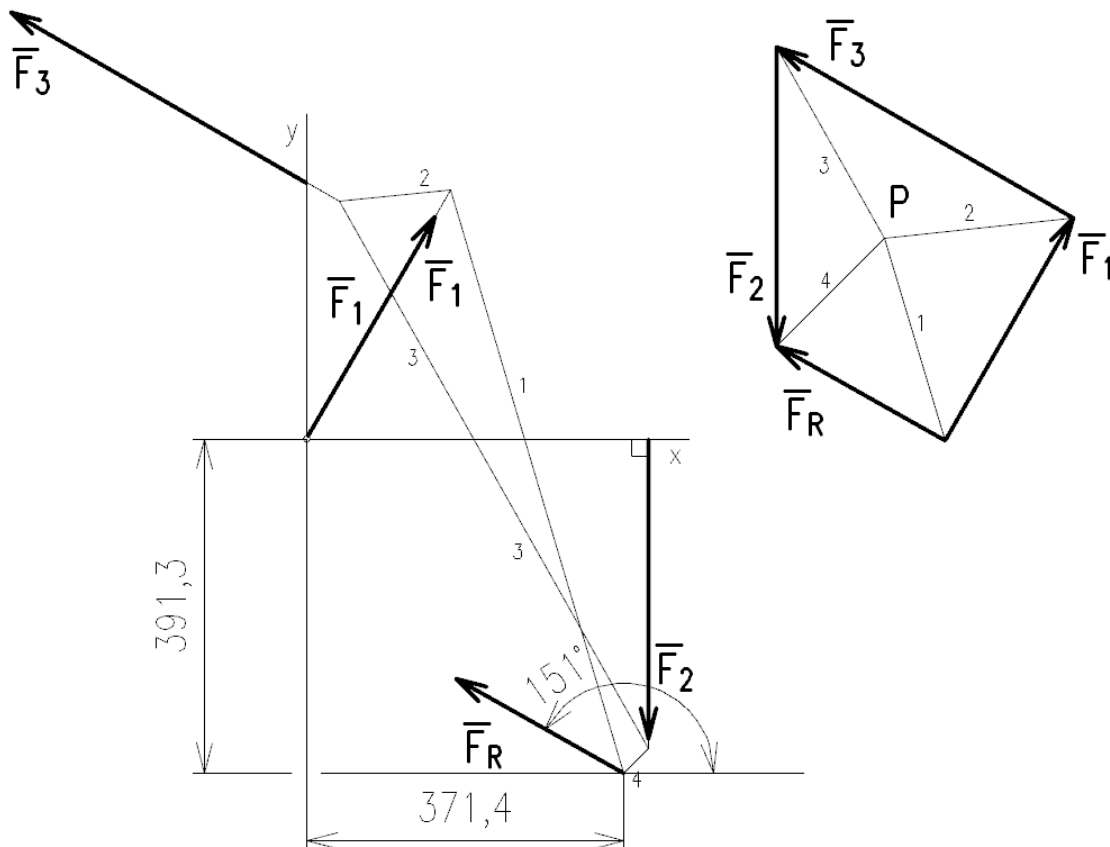
Obr. 42



Pól můžeme zvolit kdekoli s ohledem na prostor, který máme v kreslicí ploše k dispozici. S konstrukcí vláknového mnohoúhelníku začínáme v bodě, který zvolíme na nositelce síly  $F_1$ .



**Řešení:**



Obr. 43

$$\begin{aligned}
 F_R &= 2,25 \text{ kN}, \\
 \alpha_R &= 151^\circ, \\
 x_R &= 371,4 \text{ mm}, \\
 y_R &= 391,3 \text{ mm}.
 \end{aligned}$$

### **🔊 Momentová věta**

Polohu výslednice obecné soustavy určujeme pomocí výsledného momentu soustavy. Tento výsledný moment určíme pomocí momentové (také Varignonovy) věty.

**Moment výslednice silové soustavy ke zvolenému bodu se rovná algebraickému součtu momentů jednotlivých sil k témuž bodu:**

$$M_R = \sum_1^n M_i.$$

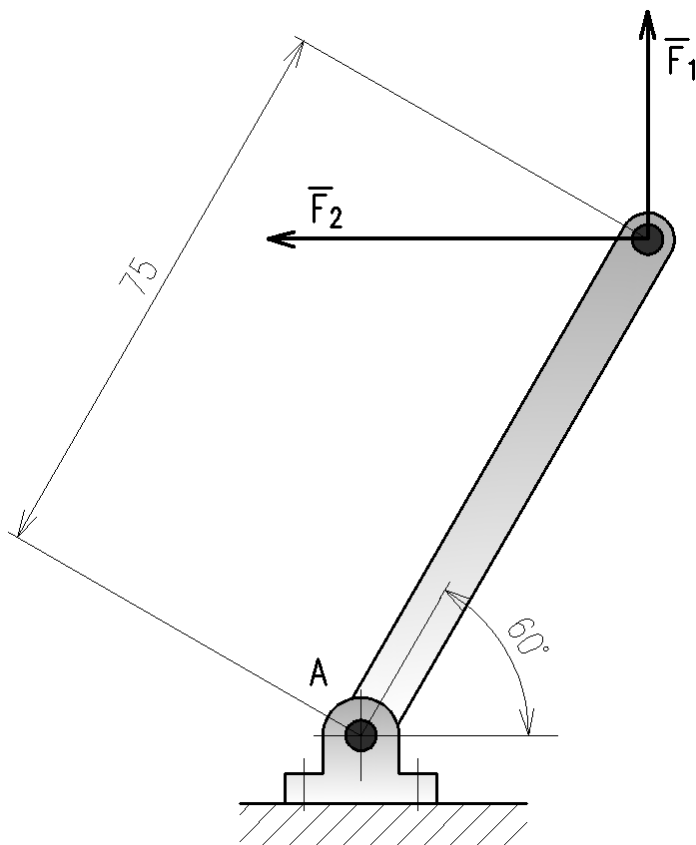
Před početním řešením výslednice silových soustav je nutno procvičit výpočet výsledného momentu na příkladech.

### **Příklady:**

V následujících dvou případech vypočítejte moment soustavy sil k bodu A. Nezapomeňte uvést smysl působení momentu (smysl otáčení soustavy).

$$F_1 = 30 \text{ N},$$

$$F_2 = 50 \text{ N}.$$



Obr. 44

**Řešení:**

Kladný smysl otáčení zvolíme proti směru hodinových ručiček.

$$M_R = \sum M_i; \quad M_R = M_1 + M_2 = F_1 \cdot 75 \cdot \sin 30^\circ + F_2 \cdot 75 \cdot \sin 60^\circ = 30 \cdot 75 \cdot \sin 30^\circ + 50 \cdot 75 \cdot \sin 60^\circ = \underline{4\,372,59 \text{ (Nmm)}}$$

Výsledný moment bude působit proti směru hodinových ručiček.



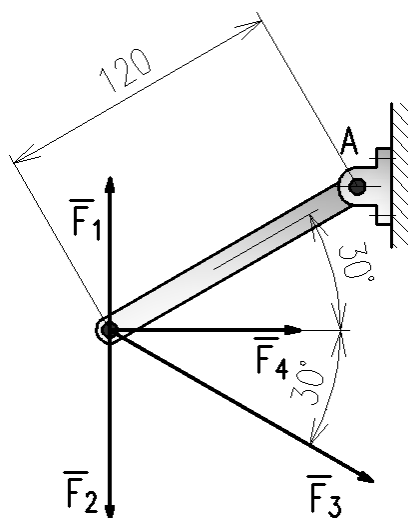
*Zopakujte si možnosti výpočtu momentu síly k bodu.*

$$F_1 = 40 \text{ N},$$

$$F_2 = 50 \text{ N},$$

$$F_3 = 80 \text{ N},$$

$$F_4 = 50 \text{ N}.$$



Obr. 45

### Řešení:

$$M_R = \sum M_i; \quad M_R = -M_1 + M_2 + M_3 + M_4 = -F_1 \cdot 120 \cdot \sin 60^\circ + F_2 \cdot 120 \cdot \sin 120^\circ + F_3 \cdot 120 \cdot \sin 60^\circ + F_4 \cdot 120 \cdot \sin 30^\circ = -40 \cdot 120 \cdot \sin 60^\circ + 50 \cdot 120 \cdot \sin 120^\circ + 80 \cdot 120 \cdot \sin 60^\circ + 50 \cdot 120 \cdot \sin 30^\circ = \underline{12\,353,1 \text{ (Nmm)}}$$

### 🔊 Početní řešení výslednice obecné soustavy sil

Náhradu silové soustavy výslednicí můžeme provést dvojitým způsobem:

1. Výslednicí na předem neurčené nositelce.
2. Výslednicí a výslednou silovou dvojicí v předem určeném bodě.

Podrobněji se budeme věnovat prvnímu řešení, druhé bude ukázáno pouze na obecné soustavě.

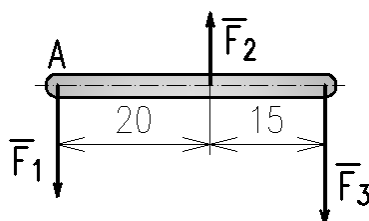
#### 1. Náhrada výslednicí na předem neurčené nositelce

##### a) síly rovnoběžné

##### Příklad:

Stanovte početně výslednici daných sil a její vzdálenost od bodu A.

$$\begin{aligned} F_1 &= 2 \text{ kN}, \\ F_2 &= 1 \text{ kN}, \\ F_3 &= 2,5 \text{ kN}. \end{aligned}$$



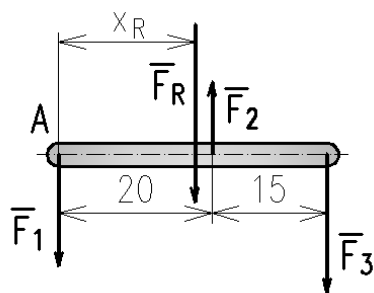
Obr. 46

1. **Velikost výslednice**, která bude opět rovnoběžná se všemi silami, určíme z rovnice  $F_R = \sum F_i$ :

$$F_R = -F_1 + F_2 - F_3 = -2 + 1 - 2,5 = \underline{-3,5 \text{ (kN)}}.$$

Znaménko říká, že smysl výslednice se shoduje se smyslem sil  $F_1$  a  $F_3$ .

2. **Polohu výslednice** určíme podle následujícího postupu pomocí momentové věty. K tomu účelu výslednici nejprve odhadem zakreslíme a zakótujeme.



Obr. 47

Kladný smysl momentu volíme proti smyslu pohybu hodinových ručiček.

$$M_R = \sum M_i:$$

$$-F_R \cdot x_R = F_2 \cdot 20 - F_3 \cdot 35$$

$$x_R = \frac{1 \cdot 20 - 2,5 \cdot 35}{-3,5} = \underline{19,29 \text{ (délkových jednotek)}}$$



Není nutné volit znaménka síly a momentů právě takto. Celou rovnici můžeme vynásobit  $-1$  a rovnice se nezmění. Důležité je, aby opačně působící síly a momenty měly opačná znaménka.

### a) síly obecně

#### Příklad:

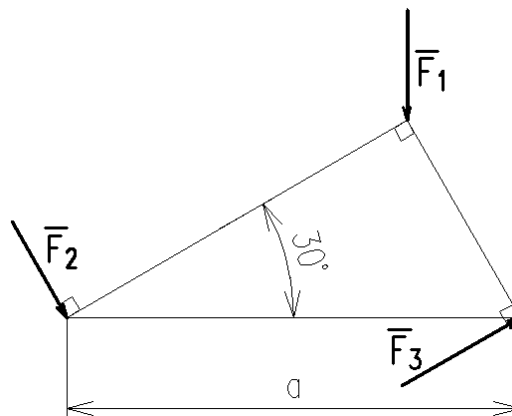
Stanovte početně výslednici daných sil, její směrový úhel a vzdálenost průsečíku její nositelky s přeponou AB pravoúhlého trojúhelníku od působíště síly  $F_2$ .

$$F_1 = 860 \text{ N,}$$

$$F_2 = 1200 \text{ N,}$$

$$F_3 = 620 \text{ N,}$$

$$a = 800 \text{ mm.}$$



Obr. 48

#### Řešení:

1. Síly rozložíme do složek ve směru souřadných os:

$$F_{1x} = 0,$$

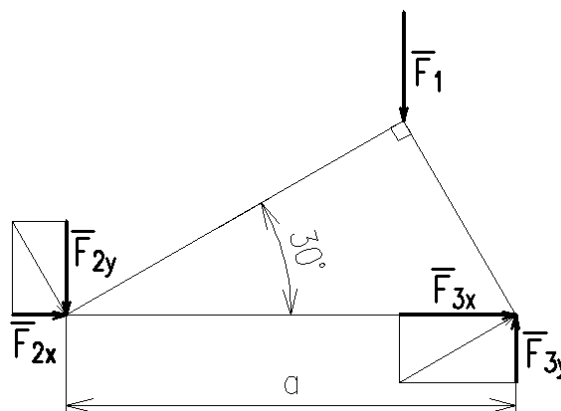
$$F_{1y} = F_1,$$

$$F_{2x} = F_2 \cdot \cos 60^\circ,$$

$$F_{2y} = F_2 \cdot \cos 30^\circ,$$

$$F_{3x} = F_3 \cdot \cos 30^\circ,$$

$$F_{3y} = F_3 \cdot \cos 60^\circ.$$



Obr. 49

2. Vyřešíme velikost částečných výslednic, vypočítáme velikost výslednice a její směrový úhel a výsledky zakreslíme do obrázku umístění:

$$F_{Rx} = \sum F_{ix},$$

$$F_{Rx} = F_{2x} + F_{3x} = 1200 \cdot \cos 60^\circ + 620 \cdot \cos 30^\circ = 1136,94 \text{ (N)},$$

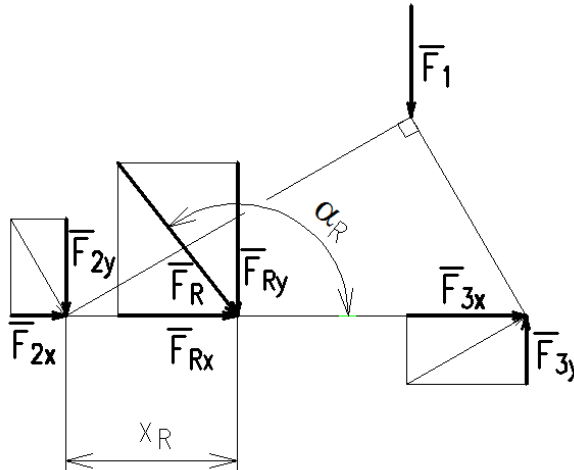
$$F_{Ry} = \sum F_{iy},$$

$$F_{Ry} = -F_1 - F_{2y} + F_{3y} = -860 - 1\,200 \cdot \cos 30^\circ + 620 \cdot \cos 60^\circ = -1\,589,23 \text{ (N)}.$$

$$F_R = \sqrt{F_{Rx}^2 + F_{Ry}^2} = \sqrt{1\,139,94^2 + 1\,589,23^2} = \underline{1\,955,79 \text{ (N)}},$$

$$\alpha'_R = \tan^{-1} \frac{F_{Ry}}{F_{Rx}} = \tan^{-1} \frac{1\,589,23}{1\,136,94} = 54,42^\circ,$$

$$\alpha_R = 180^\circ - \alpha'_R = 180 - 54,42 = 125,58^\circ.$$



Obr. 50

3. Pomocí momentové věty určíme vzdálenost průsečíku nositelky výslednice s přeponou AB:

$$M_R = \sum M_i$$

$$-F_{Ry} \cdot x_R = -F_1 \cdot a \cdot \cos 30^\circ \cdot \cos 30^\circ + F_3 \cdot a \cdot \cos 60^\circ \text{ }^1,$$

$$x_R = \frac{-F_1 \cdot a \cdot \cos^2 30^\circ + F_3 \cdot a \cdot \cos 60^\circ}{-F_{Ry}} = \frac{-860 \cdot 800 \cdot 0,75 + 620 \cdot 800 \cdot 0,5}{-1\,589,23},$$

$$x_R = \underline{168,64 \text{ (mm)}}.$$

## 2. Náhrada výslednicí a výslednou silovou dvojicí v předem určeném bodě

Řešení provedeme pro obecnou rovinnou soustavu sil a momentů.

### **Příklad:**

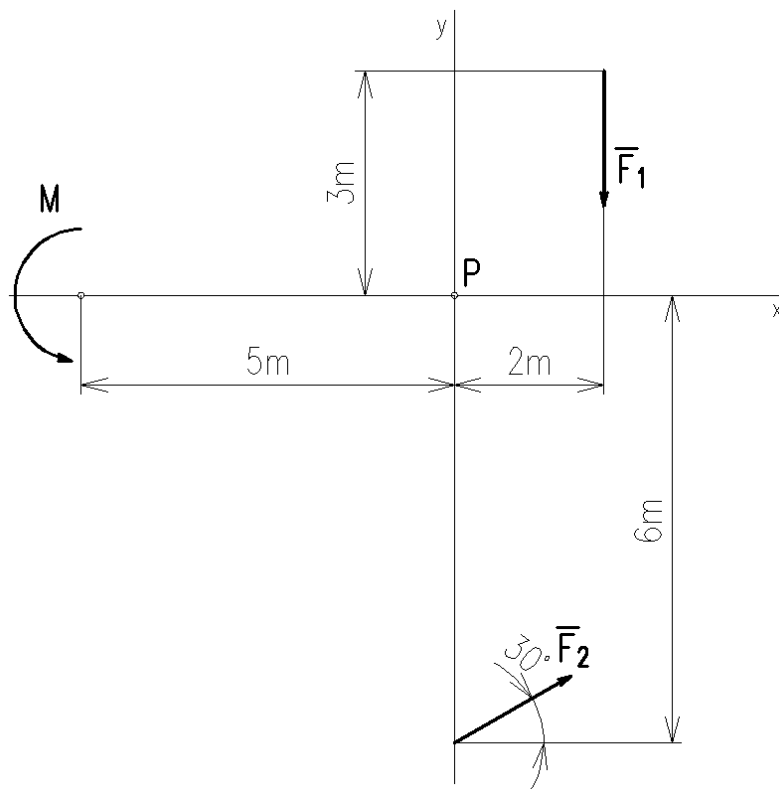
Nahraďte soustavu dvou sil a jednoho momentu výslednicí a momentem dvojice v bodě P.

$$F_1 = 20 \text{ N},$$

$$F_2 = 10 \text{ N},$$

$$M = 30 \text{ Nm}.$$

<sup>1</sup> Moment síly  $F_3$  lze také vypočítat jako  $F_3 \cdot a \cdot \sin 30^\circ$  (kolmým ramenem je kratší odvěsna).



Obr. 51

**Řešení:**

1. Velikost výslednice:

$$F_{Rx} = \sum F_{ix}$$

$$F_{Rx} = F_2 \cdot \cos 30^\circ = 10 \cdot \cos 30^\circ = 8,66 \text{ (N)}.$$

$$F_{Ry} = \sum F_{iy}$$

$$F_{Ry} = -F_1 + F_2 \cdot \cos 60^\circ = -20 + 10 \cdot \cos 60^\circ = -15 \text{ (N)}.$$

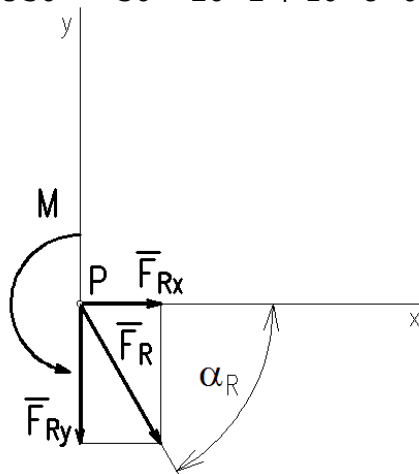
$$F_R = \sqrt{F_{Rx}^2 + F_{Ry}^2} = \sqrt{8,66^2 + 15^2} = \underline{17,3 \text{ (N)}}.$$

2. Směrový úhel výslednice:

$$\alpha_R = \tan^{-1} \frac{F_{Ry}}{F_{Rx}} = \tan^{-1} \frac{15}{8,66} = \underline{60^\circ}.$$

3. Výsledný moment dvojice:

$$M_{RP} = \sum M_{iP} = M - F_1 \cdot 2 + F_2 \cdot 6 \cdot \cos 30^\circ = 30 - 20 \cdot 2 + 10 \cdot 6 \cdot 0,866 = \underline{42 \text{ (Nm)}}.$$



Obr. 52



***Otázky a úkoly:***

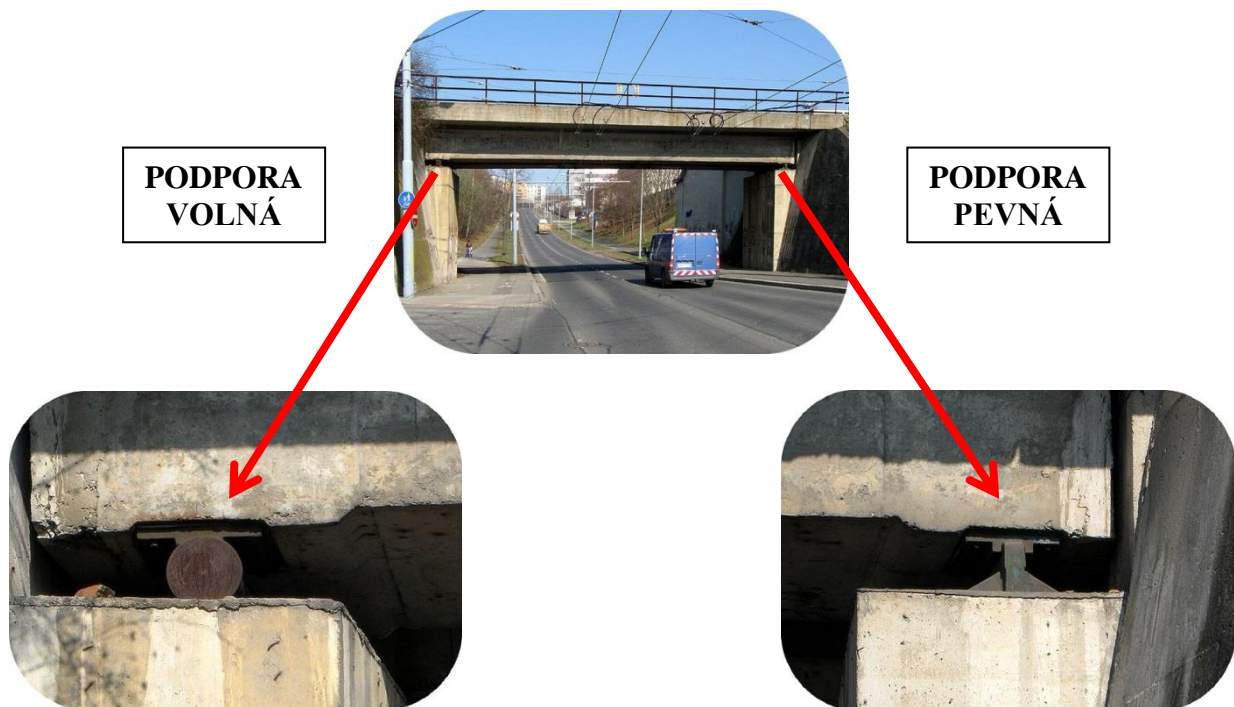
1. Jakými způsoby lze provést náhradu silové soustavy?
2. Napište a vyslovte momentovou větu.
3. Napište obecné rovnice, pomocí nichž provedeme náhradu soustavy sil a momentů výslednicí a momentem dvojice v předem určeném bodě O.

## 8. ROVNOVÁHA OBECNÉ SOUSTAVY SIL

Obsah této kapitoly:

- Druhy podpor, vazbové síly, metoda uvolňování
- Grafické řešení rovnováhy obecné soustavy sil
- Momentová věta pro rovnováhu
- Početní řešení rovnováhy obecné soustavy sil

### Druhy podpor, vazbové síly, metoda uvolňování



Obr. 53

V této kapitole se budeme zabývat především statickým řešením nosníků. **Nosník** je konstrukční prvek, který se vyznačuje malými příčnými rozměry v porovnání s délkou a je zatížením ohýbán (namáhán ohybem). Příkladem nosníků jsou hřídele, mosty, překlady, části jeřábových nosných konstrukcí atd. Nosník je uložen na podporách, které zachycují vnější zatížení, v jehož důsledku v nich působí vazbové síly, případně momenty (druhotné vnější zatížení). Aby byl nosník řešitelný metodami statiky (staticky určitý), musí být u rovinné soustavy sil pouze tři neznámé složky vazbových účinků. Je-li neznámých složek více, je nosník staticky neurčitý<sup>1</sup>.

Základní druhy podpor byly probrány v kapitole o rovnováze tří sil. Připomeňme, že rozeznáváme **podporu volnou**, u níž známe směr vazbové síly (kolmice k podložce, síla v laně, řetězu nebo tyči), a **podporu pevnou**, která zachytí sílu v libovolném směru. Obě podpory jsou kloubové, tj. nezachycují otáčivý účinek.

Posuvný účinek sil i účinek otáčivý zachytí **vetknutí**:

<sup>1</sup> Neznamená to, že staticky neurčitý nosník je neřešitelný, naopak tyto případy jsou v technice velmi časté (hřídele ve více ložiskách apod.); chybějící rovnice se sestavují např. z deformačních podmínek. Opouštíme zde tedy představu dokonale tuhého tělesa.





Příkladem vetknutí je rameno jeřábu, hřebík ve stěně, nebo třeba balkón.

Obr. 54

Vazbové síly řešíme buď graficky metodou vláknového mnohoúhelníku, nebo početně **metodou uvolňování**, kterou zde jako základní metodu mechaniky znovu připomeneme.

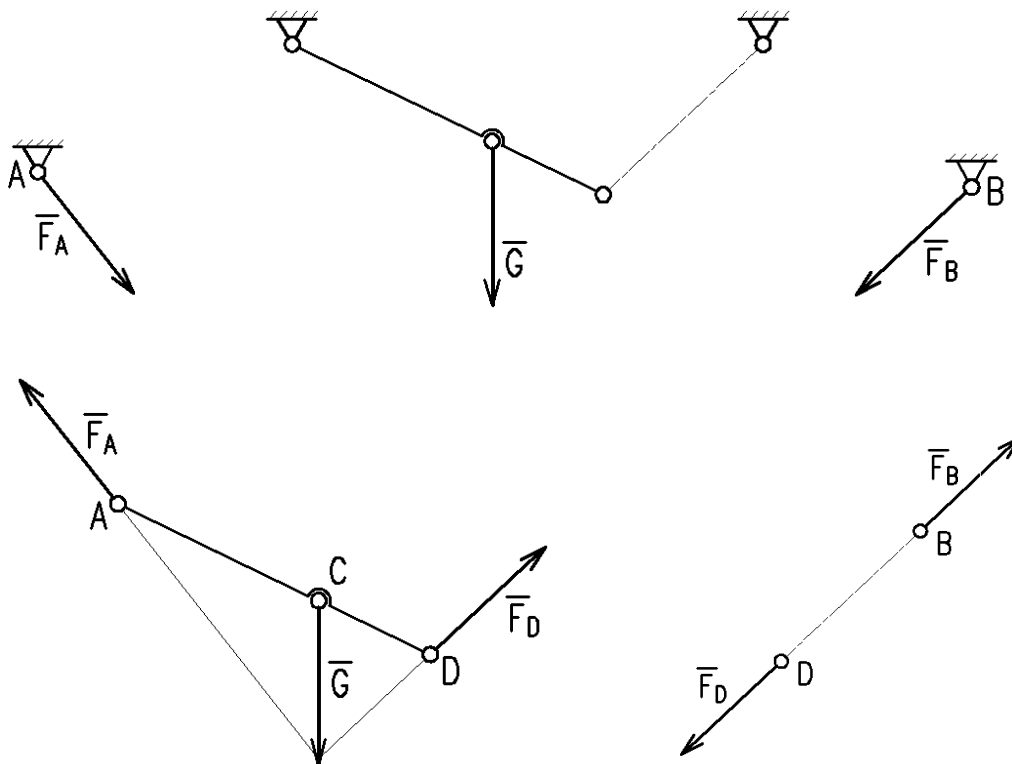
### Řešení metodou uvolňování:

1. Těleso (nosník) uvolníme, tj. odstraníme vazby.
2. Odstraněné vazby nahradíme vazbovými účinky (reakčními silami a momenty – podle druhu podpory), které reprezentují účinky odstraněných těles. Tím obnovíme rovnováhu.
3. Pro soustavu vnějších zatížení a druhotných (vazbových) účinků sestavíme a řešíme podmínky rovnováhy.

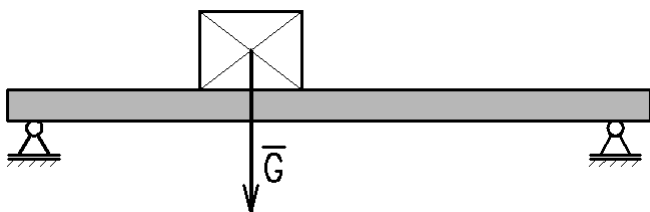
Nosníky na dvou podporách budeme řešit graficky i početně, příklad na nosník vetknutý vyřešíme pouze početně.

### Cvičení metody uvolňování

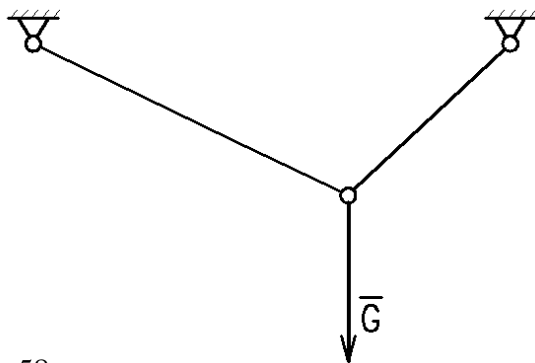
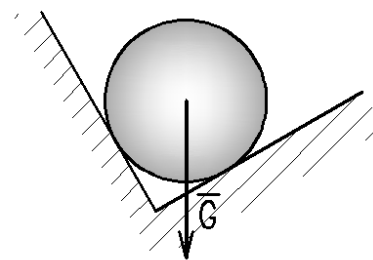
U následujících soustav určete druhy podpor, nakreslete uvolnění všech členů a pokuste se zakreslit správně orientované síly bez ohledu na jejich velikosti. První úloha je vzorová.



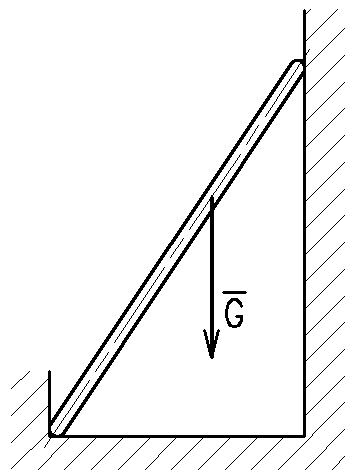
Obr. 55



Obr. 56  
Obr. 57



Obr. 58  
Obr. 59



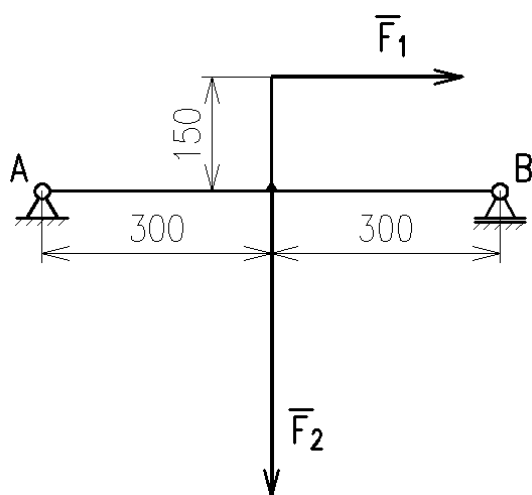
### Grafické řešení rovnováhy obecné soustavy sil

Úlohy tohoto typu, tedy řešení vazbových sil nosníku, rozdělíme na úlohy s obecnou rovinnou soustavou sil a na zvláštní případ – soustavu rovnoběžných sil.

#### **Příklad:**

Graficky vyřešte vazbové síly nosníku na dvou podporách<sup>1</sup>, je-li dáno:

$$F_1 = 500 \text{ N}, F_2 = 800 \text{ N}.$$



Obr. 60

Jedná se o soustavu dvou kolmých sil. Postup řešení takové úlohy se skládá ze dvou základních kroků:

1. Vyřešení výslednice.
2. Řešení rovnováhy tří sil: výslednice a dvou sil vazbových, tedy nalezení společného průsečíku nositelek a sestrojení silového trojúhelníka se šipkami v jenom sledu.

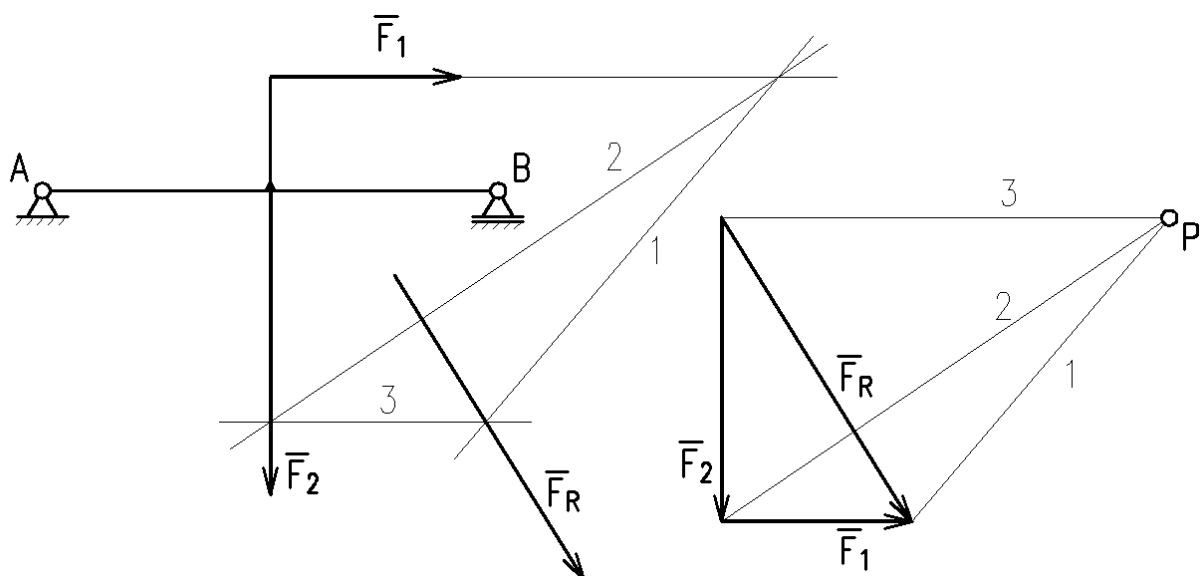
Výslednice by se v tomto jednoduchém případě dala řešit i posunutím sil do společného působíště a sestrojením rovnoběžníku, ale zde provedeme řešení důsledně použitím vláknového mnohoúhelníku.

<sup>1</sup> Podobně jako v tomto případě je zatížen např. šnekový hřídel ve šnekové převodovce.

**Řešení:**

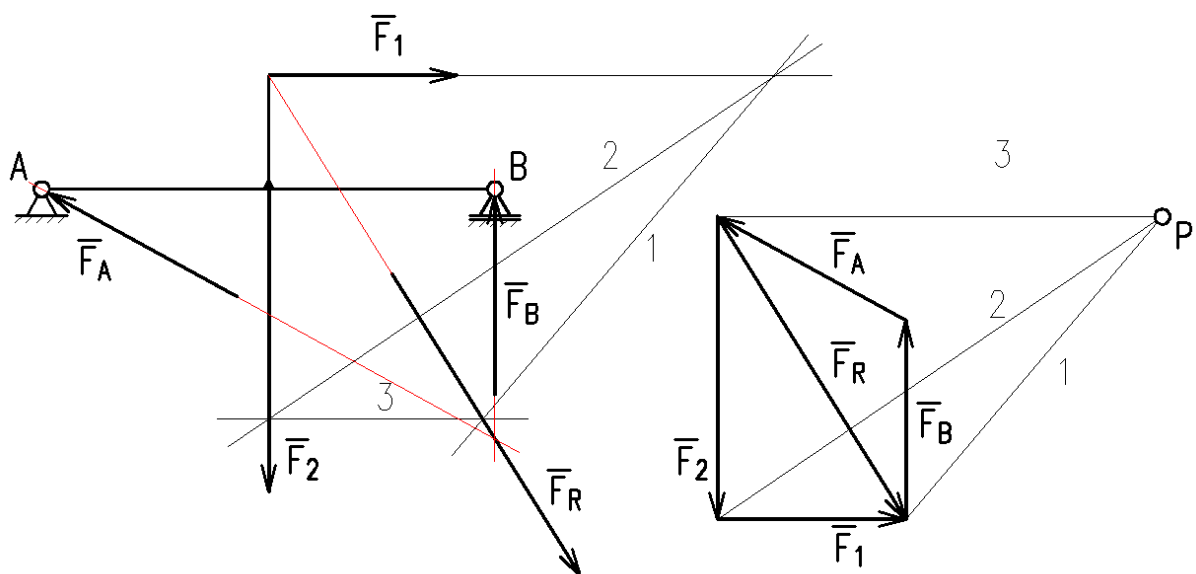
1. Nalezení výslednice:

Volíme měřítko délek  $M$  1:10 a měřítko sil  $m_F = 20 \text{ N} \cdot \text{mm}^{-1}$ .



Obr. 61

2. Řešení rovnováhy tří sil:



Obr. 62

Vyřešené síly změříme a podle měřítka určíme velikost:

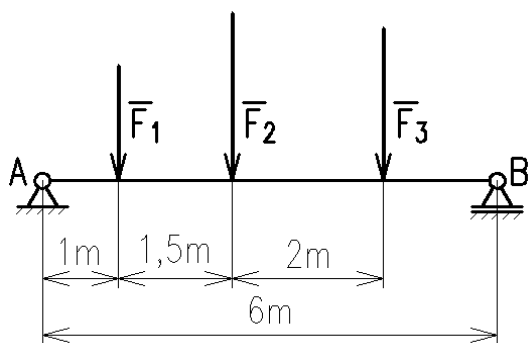
$$F_A = 571 \text{ N, směrový úhel je } 151^\circ.$$

$$F_B = 525 \text{ N.}$$

**Příklad:**

Graficky vyřešte vazbové síly nosníku na dvou podporách, je-li dáno:

$$F_1 = 1\,500 \text{ N, } F_2 = 2\,200 \text{ N, } F_3 = 2\,000 \text{ N.}$$

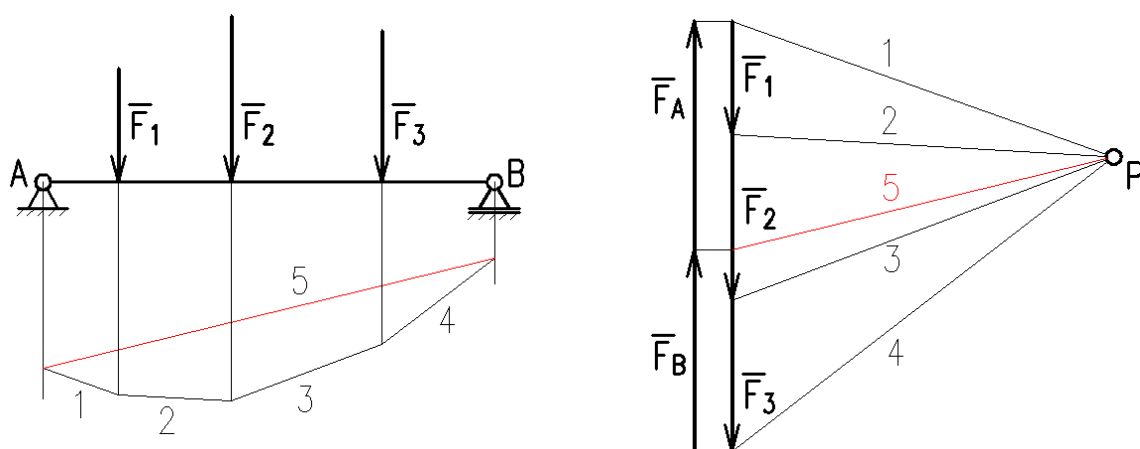


Obr. 63

U soustavy rovnoběžných sil začínáme řešení stejně jako při hledání výslednice. Poslední, neznámé vlákno ohraničuje s jedním krajním vláknem jednu z vazbových sil, s druhým krajním vláknem pak druhou vazbovou silou. Vedeme jej tedy průsečíkem jednoho krajního vlákna s nositelkou jedné vazbové síly (nezáleží na tom, které) a průsečíkem druhého krajního vlákna s nositelkou druhé vazbové síly.

**Řešení:**

Volíme měřítko délek  $M$  1:100 a měřítko sil  $m_F = 100 \text{ N} \cdot \text{mm}^{-1}$ .



Obr. 64

Výsledky:

$$F_A = 3\,033 \text{ N},$$

$$F_B = 2\,667 \text{ N}.$$

**🔊 Momentová věta pro rovnováhu**

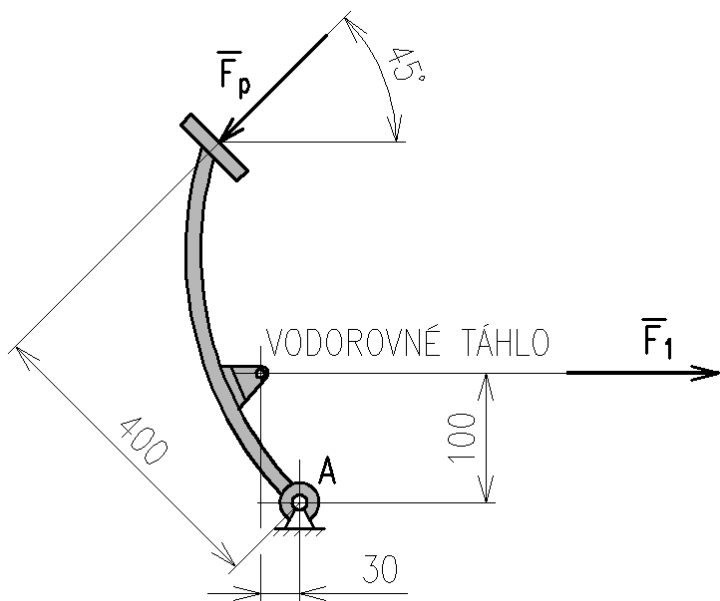
Výslednice i výsledný moment soustavy v rovnováze se musejí rovnat 0. U obecné soustavy sil musíme sestavit nejméně jednu momentovou podmínku rovnováhy. Momentová věta pro rovnováhu, která je touto podmínkou rovnováhy, má tvar:

$$\sum M_{iO} = 0.$$

**Čteme:** Algebraický součet momentů silové soustavy ke zvolenému bodu (a tedy moment výslednice) se rovná nule. Index  $O$  označuje vztážný bod, k němuž počítáme momenty všech sil; nahradíme jej skutečným označením vztážného bodu.

**Příklad:**

Vypočítejte sílu  $F_p$ , kterou musíme působit na ovládací pedál spojky. Síla  $F_1 = 400 \text{ N}$ .



Obr. 65

**Řešení:**

Je-li páka v rovnováze, musí se rovnat momenty obou sil ke stejnému bodu, resp. jejich algebraický součet se musí rovnat 0.

$$\sum M_{iA} = 0,$$

$$F_1 \cdot 100 - F_p \cdot 400 = 0,$$

$$F_p = F_1 \cdot \frac{100}{400} = 400 \cdot \frac{1}{4} = \underline{100 \text{ (N)}}.$$

**🔊) Početní řešení rovnováhy obecné soustavy sil**

Početní řešení spočívá ve formulaci podmínek rovnováhy, které jsou v rovině obecně tři (staticky určitá rovinná soustava může mít nejvýše tři neznámé složky sil), pokud se jedná o soustavu rovnoběžných sil, postačí dvě podmínky rovnováhy:

$$\begin{aligned} \sum F_{ix} &= 0, \\ \sum F_{iy} &= 0, \\ \sum M_i &= 0. \end{aligned}$$

**Vztažný bod pro momentovou rovnici volíme nejčastěji v jedné z podpor, čímž odpadne moment jedné vazbové síly a řešení se zjednoduší.**



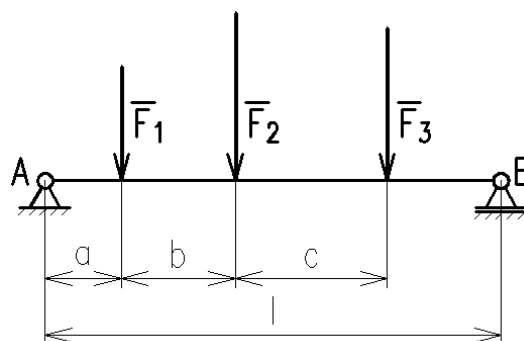
Pracujeme metodou uvolňování, podpory nahradíme vazbovými silami. Pokud nemůžeme přímo odhadnout jejich smysl, předpokládáme, že jejich složky směřují v kladném smyslu (tj. „doprava a nahoru“). Vyjde-li u složky znaménko záporné, obrátíme její smysl.

**Příklad:**

Početně řešte druhý příklad z grafických řešení.

$$F_1 = 1\,500 \text{ N}, F_2 = 2\,200 \text{ N}, F_3 = 2\,000 \text{ N}.$$

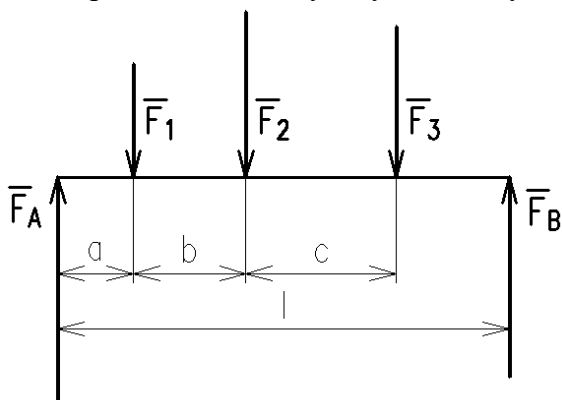
$$a = 1 \text{ m}, b = 1,5 \text{ m}, c = 2 \text{ m}, l = 6 \text{ m}.$$



Obr. 66

**Řešení:**

Předpokládáme kladný smysl vazbových sil.



Podmínky rovnováhy<sup>1</sup>:

$$\sum F_{iy} = 0,$$

$$-F_1 - F_2 - F_3 + F_A + F_B = 0.$$

$$\sum M_{iA} = 0,$$

$$-F_1 a - F_2(a + b) - F_3(a + b + c) + F_B l = 0.$$

Obr. 67

Momentová rovnice je rovnicí o jedné neznámé, proto přímo vypočítáme vazbovou sílu  $F_B$ :

$$F_B = \frac{F_1 a + F_2(a + b) + F_3(a + b + c)}{l} = \frac{1\,500 \cdot 1 + 2\,200 \cdot 2,5 + 2\,000 \cdot 4,5}{6} = \underline{2\,666,7 \text{ (N)}},$$

$$F_A = F_1 + F_2 + F_3 - F_B = 1\,500 + 2\,200 + 2\,000 - 2\,666,7 = \underline{3\,033,3 \text{ (N)}}.$$



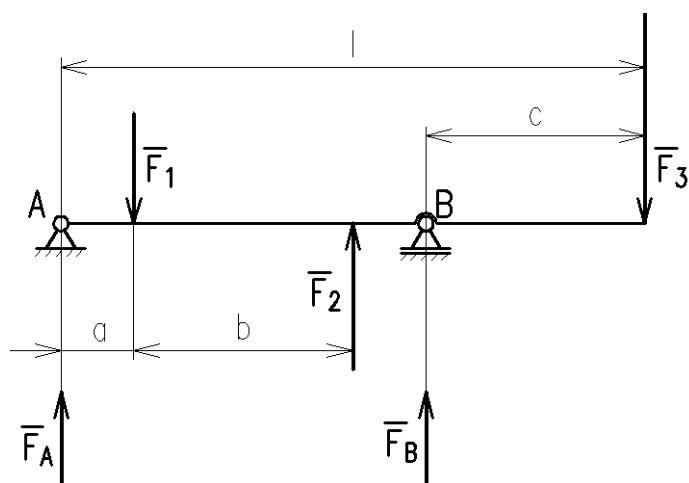
*V podmínkách rovnováhy jsme zavedli znaménka v souladu s obvyklou praxí, ale když si uvědomíme, že rovnici můžeme vynásobit -1 a rovnice se až na znaménka nezmění, můžeme zavést kladný a záporný smysl tak, jak je to pohodlnější.*

**Příklad:**

Početně řešte vazbové síly:

$$F_1 = 1\,500 \text{ N}, F_2 = 2\,000 \text{ N}, F_3 = 3\,000 \text{ N}.$$

$$a = 100 \text{ mm}, b = 300 \text{ mm}, c = 300 \text{ mm}, l = 800 \text{ mm}.$$

**Řešení:**

Předpokládáme kladný smysl vazbových sil:

$$-F_1 + F_2 - F_3 + F_A + F_B = 0,$$

k bodu A:

$$F_1 a - F_2(a + b) + F_3 l - F_B(l - c) = 0.$$

Obr. 68

<sup>1</sup> Složkovou podmínku můžeme nahradit druhou momentovou podmínkou.

$$F_B = \frac{F_1 a - F_2(a + b) + F_3 l}{(l - c)} = \frac{1\,500 \cdot 100 - 2\,000 \cdot 400 + 3\,000 \cdot 800}{500} = \underline{3\,500 \text{ (N)}}$$

$$F_A = F_1 - F_2 + F_3 - F_B = 1\,500 - 2\,000 + 3\,000 - 3\,500 = \underline{-1\,000 \text{ (N)}}$$

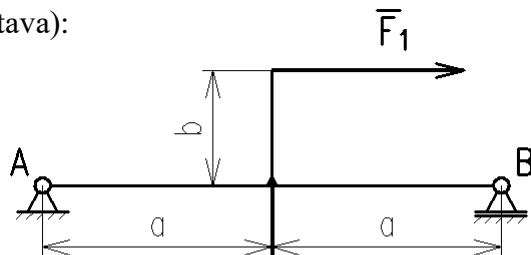
Z výsledku vyplývá, že vazbová síla  $F_A$  bude směřovat **dolů**.

**Příklad:**

Opět úloha dříve řešená graficky (obecná soustava):

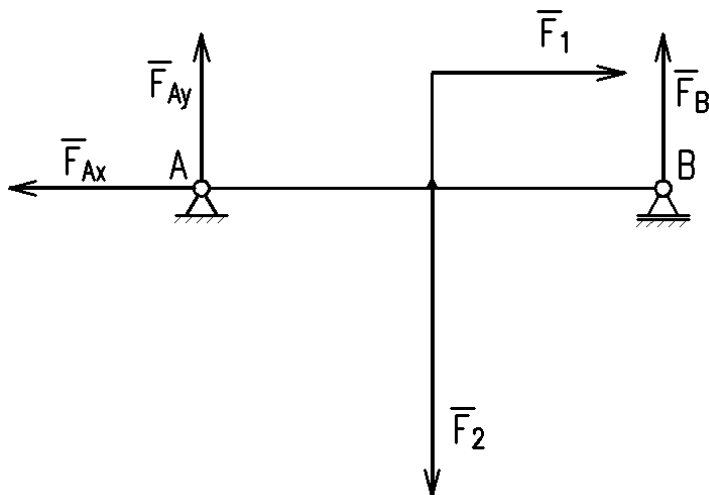
$$F_1 = 500 \text{ N}, F_2 = 800 \text{ N}.$$

$$a = 300 \text{ mm}, b = 150 \text{ mm}.$$



Obr. 69

**Řešení:**



Obr. 70

Smysl složky  $F_{Ax}$  se dá snadno odhadnout, protože je reakcí na jedinou vodorovnou sílu. Ostatní složky předpokládáme v kladném smyslu osy  $y$ :

$$F_1 - F_{Ax} = 0,$$

$$-F_2 + F_{Ay} + F_B = 0,$$

$$\underline{F_1 b + F_2 a - 2F_B a = 0} \text{ (k bodu A).}$$

$$F_{Ax} = F_1 = \underline{500 \text{ (N)}},$$

$$F_B = \frac{F_1 b + F_2 a}{2a} = \frac{500 \cdot 150 + 800 \cdot 300}{600} = \underline{525 \text{ (N)}},$$

$$F_{Ay} = F_2 - F_B = 800 - 525 = \underline{275 \text{ (N)}}.$$

Můžeme dále vypočítat velikost a směrový úhel vazbové síly  $F_A$ :

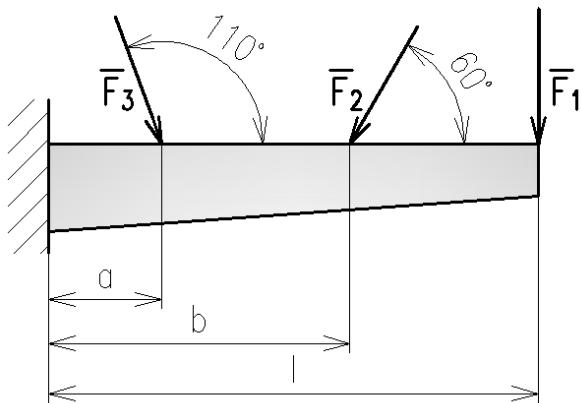
$$F_A = \sqrt{F_{Ax}^2 + F_{Ay}^2} = \sqrt{500^2 + 275^2} = \underline{570,6 \text{ (N)}},$$

$$\alpha = \tan^{-1} \frac{F_{Ay}}{F_{Ax}} = \tan^{-1} \frac{275}{500} = \underline{28,8^\circ}, \text{ tj. } 151,2^\circ \text{ od kladné poloosy } x.$$

Výsledek je ve shodě s předchozím grafickým řešením.

**Příklad:**

Řešte vazbové účinky vetknutého nosníku:



$F_1 = 800 \text{ N}, F_2 = 300 \text{ N}, F_3 = 500 \text{ N}.$   
 $a = 150 \text{ mm}, b = 400 \text{ mm}, l = 650 \text{ mm}.$

**Řešení:**

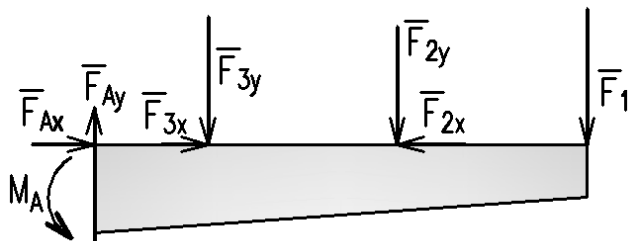
Uvolnění nosníku spočívá v zavedení předpokládaného smyslu složek vazbové síly a vazbového momentu:

$$F_{3x} - F_{2x} + F_{Ax} = 0,$$

$$F_1 + F_{2y} + F_{3y} - F_{Ay} = 0,$$

$$\underline{F_1 l + F_{2y} b + F_{3y} a - M_A = 0.}$$

Při výpočtu složky  $F_{3y}$  použijeme pro větší přehlednost doplňkového úhlu.



Obr. 71

$$F_{Ax} = F_2 \cos 60 - F_3 \cos 70 = 300 \cdot \cos 60 - 500 \cdot \cos 70 = \underline{-21 \text{ (N)}}.$$

Smysl složky je nutno obrátit.

$$F_{Ay} = F_1 + F_2 \sin 60 + F_3 \sin 70 = 800 + 300 \cdot \sin 60 + 500 \sin 70 = \underline{1\,529,6 \text{ (N)}},$$

$$M_A = F_1 l + F_2 b \sin 60 + F_3 a \sin 70 = 800 \cdot 650 + 300 \cdot 400 \cdot \sin 60 + 500 \cdot 150 \cdot \sin 70 = \underline{694\,400,0 \text{ (Nmm)}}$$



**Otázky:**

1. Který důležitý základní princip mechaniky je základem metody vláknového mnohoúhelníka?
2. Jak určujeme při početním řešení smysl neznámých složek vazbových sil?
3. Jak zní momentová věta pro rovnováhu?
4. Kde a proč volíme nejčastěji vztažné body pro momentové podmínky rovnováhy?
5. V čem spočívá metoda uvolňování?



## 9. TĚŽIŠTĚ SE ZAMĚŘENÍM NA TĚŽIŠTĚ ČAR A PLOCH

Obsah této kapitoly:

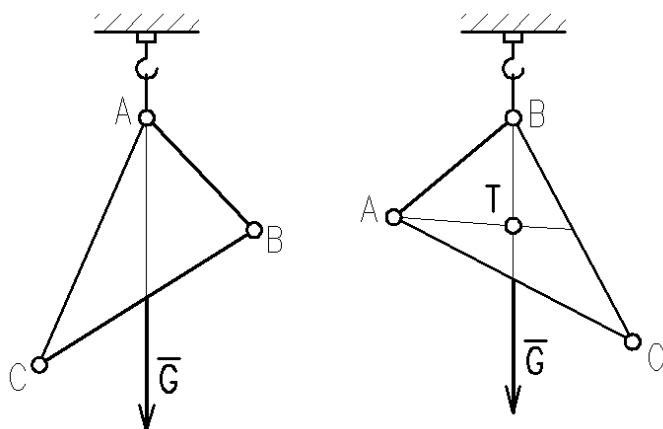
- Pojem těžiště tělesa a těžiště (geometrického středu) čáry a plochy
- Těžiště rovinné čáry
- Těžiště složené plochy
- Guldinovy (Pappovy) věty

### Pojem těžiště tělesa a těžiště (geometrického středu) čáry a plochy

Těžiště je bod, který pokládáme za působíště výsledné tíhové síly tělesa. Jeho polohu určíme jako průsečík dvou těžnic, což jsou vektorové přímky výsledné tíhové síly při libovolném natočení tělesa. Grafické i početní řešení těžiště je tedy v podstatě hledáním polohy výslednice soustavy rovnoběžných (tíhových) sil jednotlivých částí tělesa:

$$\begin{aligned}G \cdot x_T &= \sum G_i \cdot x_i ; x_T = \frac{\sum G_i \cdot x_i}{G}, \\G \cdot y_T &= \sum G_i \cdot y_i ; y_T = \frac{\sum G_i \cdot y_i}{G}, \\G \cdot z_T &= \sum G_i \cdot z_i ; z_T = \frac{\sum G_i \cdot z_i}{G}.\end{aligned}$$

Nalezení těžiště je podstatně usnadněno, má-li těleso jednu či více os souměrnosti, protože každá osa souměrnosti je zároveň těžnicí.



Příklad pokusného určení těžiště homogenní trojúhelníkové desky zavěšováním. Početní či grafické řešení bychom mohli provést tak, že bychom desku rozdělili na úzké proužky – hranolky a řešili bychom výslednici tíhových sil.



Čím více proužků, tím větší přesnost. Tato metoda je základem integrálního počtu<sup>1</sup>.

Obr. 72

Jedná-li se o homogenní těleso, poloha těžiště závisí pouze na jeho tvaru (v rovnicích pro výslednici se vykrátí příslušné veličiny – tíhové zrychlení, hustota, případně průřez či tloušťka). Jakési „těžiště“ tedy má čára i plocha. Správnější pak je mluvit o **geometrickém středisku** (centroidu) a v případě homogenního tělesa tedy dosazujeme do rovnic místo sil objemy, u čar délky, u ploch obsahy.

### Těžiště (geometrické středisko) rovinné čáry

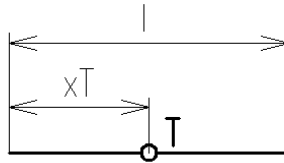
Za rovinnou čáru můžeme pokládat i homogenní tyč, či prutovou konstrukci. V těžišti obrysu (rovinné čáry) se nachází i působíště výsledné střížné síly při výrobě výstřížku z plechu.

<sup>1</sup> Integrální počet pracuje s nekonečným počtem nekonečně malých částí, umožňuje tedy řešit spojité těleso.

Složenou čáru rozdělíme na základní čáry, u nichž známe polohu těžiště předem (úsečky, kruhové oblouky).

**Těžiště základních čar:**

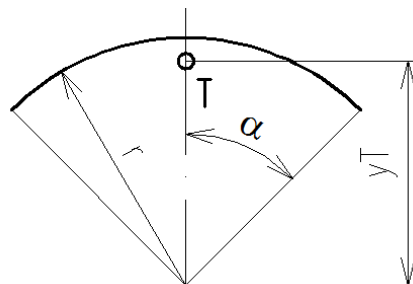
Úsečka:



$$x_T = \frac{l}{2}$$

Obr. 73

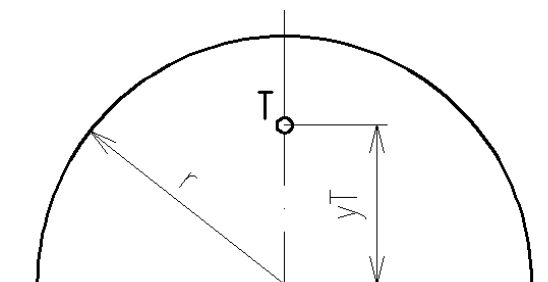
Kruhový oblouk<sup>1</sup>:



$$y_T = r \cdot \frac{\sin \alpha}{\text{arc } \alpha}$$

Obr. 74

Půlkružnice<sup>2</sup>:



$$y_T \doteq 0,64 \cdot r$$

Obr. 75

V těžištích jednoduchých čar zavedeme síly, jejichž velikosti jsou úměrné délkám úseků (pomyslná hustota a průřez se v rovnicích vykrátí) a řešíme výslednici analogicky s těžištěm tělesa (početní řešení):

$$l \cdot x_T = \sum l_i \cdot x_i ; x_T = \frac{\sum l_i \cdot x_i}{l},$$

$$l \cdot y_T = \sum l_i \cdot y_i ; y_T = \frac{\sum l_i \cdot y_i}{l}.$$

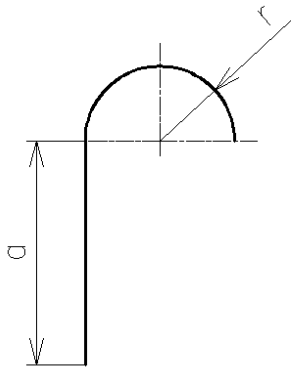
Při grafickém řešení postupujeme metodou vláknového mnohoúhelníka. Pól můžeme volit zcela libovolně, ale většinou využíváme souměrnosti silových obrazců, jak bude naznačeno v příkladu.

<sup>1</sup> arc  $\alpha$  je velikost úhlu v obloukové míře.

<sup>2</sup> Polohu těžiště odvodíme z těžiště oblouku dosazením úhlu  $90^\circ$ , tj.  $\pi/2$ .

**Příklad:**

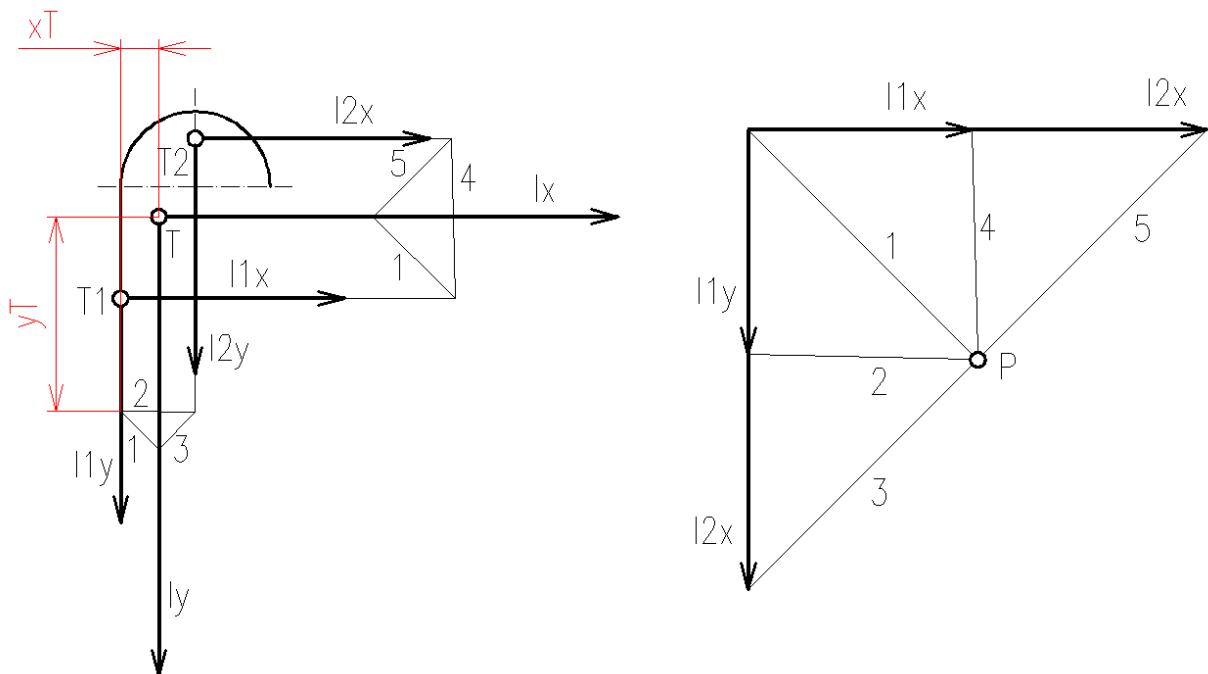
Nalezněte polohu těžiště složené čáry:  $r = 10 \text{ mm}$ ,  $a = 30 \text{ mm}$ .



Obr. 76

**Řešení:**

Čáru rozdělíme na dva úseky, v tomto případě na úsečku a půlkružnici, a vyznačíme jejich těžiště. V těžištích zavedeme myšlené tíhové síly, jejichž velikost je závislá pouze na délce čáry:  $l_1 = a$ ,  $l_2 = \pi \cdot r$ . Protože čára nemá osu souměrnosti, musíme řešit dvě kolmé soustavy rovnoběžných sil.

**a) grafické řešení:**

Obr. 77

Dvojí „zavěšení“ čáry v kolmých směrech vyjádříme zavedením dvou kolmých soustav sil. Souřadnice těžiště, které leží v průsečíku nositelek výslednic, určíme odměřením. Zde  $x_T = 5,1 \text{ mm}$ ,  $y_T = 25,9 \text{ mm}$  (měřeno od dolního konce čáry).

**b) početní řešení:**

Velikost výslednic:

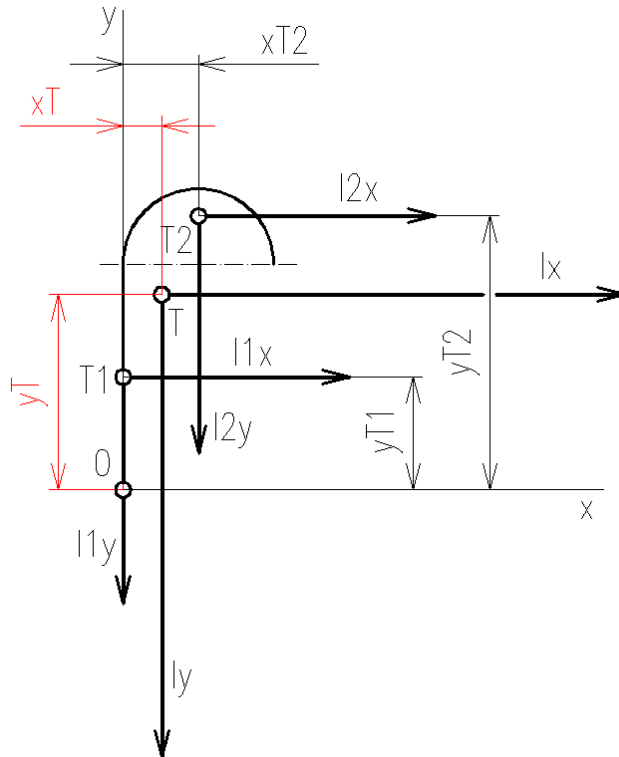
$$l_x = l_y = \sum l_i; \quad l_x = l_y = a + \pi \cdot r.$$

Poloha těžiště (půlka souřadné soustavy volíme opět na dolním konci úsečky):

$$x_T = \frac{\sum l_i \cdot x_i}{l} = \frac{a \cdot 0 + \pi \cdot r \cdot r}{a + \pi \cdot r} = \frac{0 + \pi \cdot 10^2}{30 + \pi \cdot 10} = \underline{\underline{5,11 \text{ (mm)}}}.$$

$$y_T = \frac{\sum l_i \cdot y_i}{l} = \frac{a \cdot \frac{a}{2} + \pi r \cdot (a + 0,64r)}{a + \pi \cdot r} = \frac{0,5 \cdot 30^2 + \pi \cdot 10 \cdot (30 + 0,64 \cdot 10)}{30 + \pi \cdot 10} =$$

$$= \underline{\underline{25,95 \text{ (mm)}}}$$



Obr. 78

Výsledky jsou ve shodě s grafickým řešením.

### Těžiště (geometrické středisko) složené plochy

Složenou plochu si můžeme představit jako výstřížek z tenkého homogenního plechu nebo papíru. Těžiště ploch dále použijeme v pružnosti a pevnosti (určení neutrální osy při namáhání ohybem) nebo v hydromechanice (tlaková síla na ponořenou stěnu).



*Řešení je analogické s úlohou o těžišti čáry, pouze místo délek dosazujeme do rovnic obsahy dílčích ploch, na něž složenou plochu rozdělíme:*

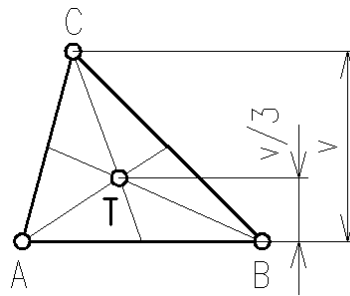
$$S \cdot x_T = \sum S_i \cdot x_i ; x_T = \frac{\sum S_i \cdot x_i}{S},$$

$$S \cdot y_T = \sum S_i \cdot y_i ; y_T = \frac{\sum S_i \cdot y_i}{S}.$$

### Těžiště základních plošných útvarů:

Těžiště plochy **čtverce, obdélníku, kosočtverce, kosodélníku, kruhu a elipsy** je v průsečíku jejich os souměrnosti. Těžiště plochy **trojúhelníku** leží v průsečíku těžnic.

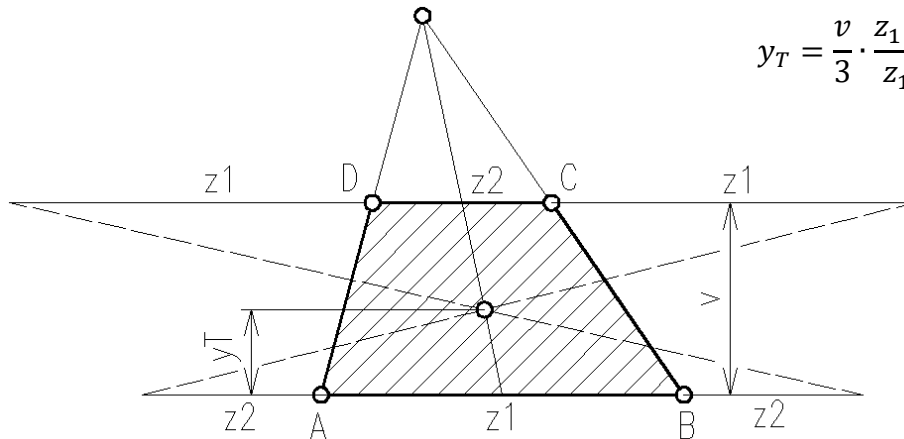
Těžiště plochy trojúhelníku:



$$y_T = \frac{v}{3}$$

Obr. 79

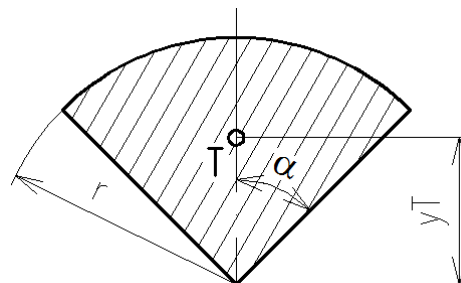
Těžiště plochy lichoběžníku určíme nejsnáze graficky:



$$y_T = \frac{v}{3} \cdot \frac{z_1 + 2z_2}{z_1 + z_2}$$

Obr. 80

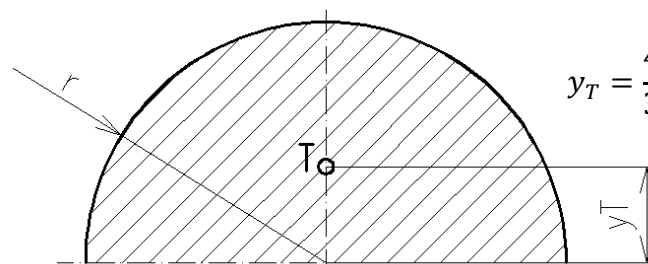
Těžiště kruhové výseče:



$$y_T = \frac{2}{3} \cdot r \frac{\sin \alpha}{\text{arc } \alpha}$$

Obr. 81

Těžiště plochy půlkruhu<sup>1</sup>:



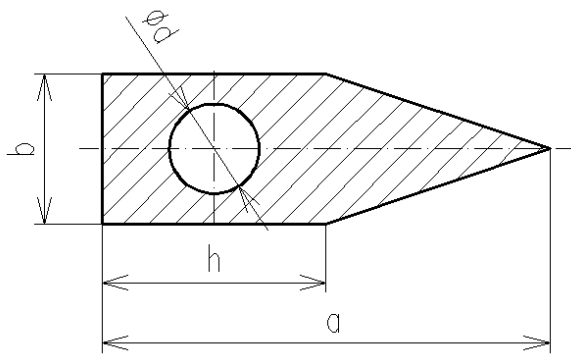
$$y_T = \frac{4}{3} \cdot \frac{r}{\pi} \doteq 0,4 \cdot r$$

Obr. 82

<sup>1</sup> Pozor na záměnu půlkruhu a půlkružnice.

**Příklad:**

Určete polohu těžiště dané složené plochy:

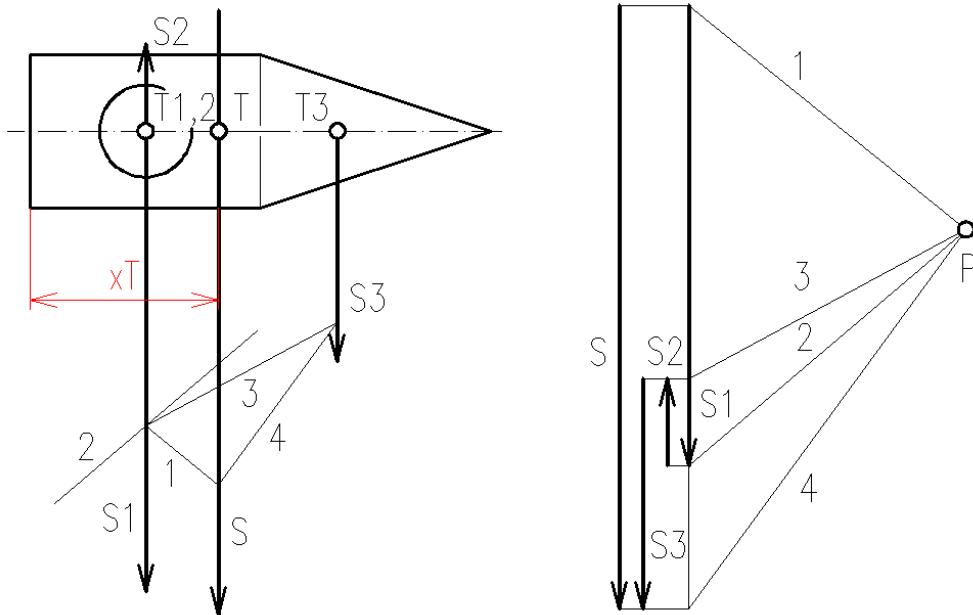


$$\begin{aligned} a &= 60 \text{ mm}, \\ b &= 20 \text{ mm}, \\ h &= 30 \text{ mm}, \\ d &= 12 \text{ mm}. \end{aligned}$$

Obr. 83

**a) grafické řešení:**

Plochu rozdělíme na tři útvary, v tomto případě na obdélník, kruh a trojúhelník a vyznačíme jejich těžiště. V těžištích zavedeme myšlené tíhové síly, jejichž velikost je závislá pouze na plošném obsahu útvarů:  $S_1 = b \cdot h$ ,  $S_2 = \pi \cdot d^2 / 4$ ,  $(b \cdot v) / 2$ , kde  $v = h - a$ . Protože plocha má osu souměrnosti, postačí řešit soustavu sil kolmých k této ose. V těžišti kruhové díry zavedeme sílu opačnou.



Obr. 84

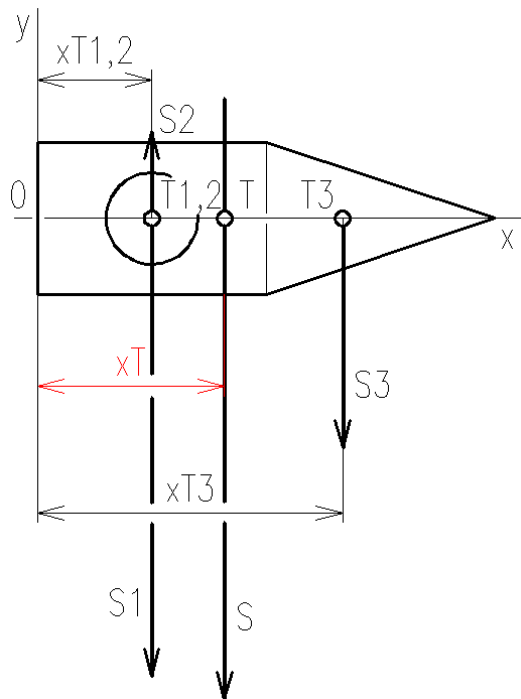
$$\begin{aligned} S_1 &= b \cdot h = 20 \cdot 30 = 600 \text{ (mm}^2\text{)}, \\ S_2 &= \frac{\pi d^2}{4} = \frac{\pi \cdot 12^2}{4} = 113,1 \text{ (mm}^2\text{)}, \\ S_3 &= \frac{b \cdot (a - h)}{2} = \frac{20 \cdot 30}{2} = 300 \text{ (mm}^2\text{)}. \end{aligned}$$

Měřítko zobrazení sil úměrných plochám volíme např.  $1 \text{ mm}^2 \cdot \text{mm}^{-1}$ .

Odměření určíme  $x_T = 24,5 \text{ mm}$ .

**b) početní řešení:**

Počátek volíme na ose vlevo.

Velikost výslednice:  $S = S_1 - S_2 + S_3$ .

(Obsahy byly vypočítány u grafického řešení).

Obr. 85

$$x_T = \frac{\sum S_i \cdot x_i}{S} = \frac{S_1 \cdot \frac{h}{2} - S_2 \cdot \frac{h}{2} + S_3 \cdot \left(h + \frac{v}{3}\right)}{S_1 - S_2 + S_3} = \frac{600 \cdot 15 - 113,1 \cdot 15 + 300 \cdot 40}{600 - 113,1 + 300} =$$

$$= \underline{24,5 \text{ (mm)}}$$

Výsledek se shoduje s grafickým řešením.

**🔊) Guldinovy (Pappovy) věty**

Guldinovy (také Pappovy)<sup>1</sup> věty umožňují snadno zjistit povrch nebo objem rotačního tělesa na základě znalosti polohy těžiště tvořící čáry nebo tvořící plochy. Tvořící čára nebo tvořící plocha vytvoří při otáčení kolem dané osy prostorový útvar (např. obdélník, rotující kolem své hrany, vytvoří válec).

**První Guldinova věta (o povrchu rotačního tělesa):**

**Povrch rotačního tělesa je dán součinem délky tvořící čáry a délky kružnice opsané při rotaci jejím těžištěm:**

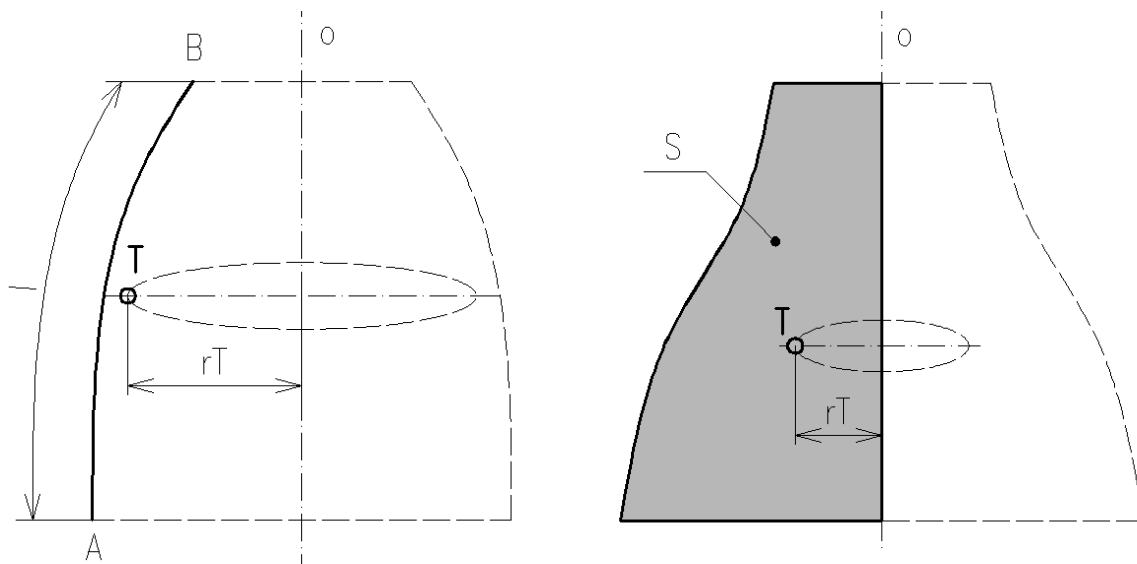
$$S = l \cdot 2 \cdot \pi \cdot r_T.$$

**Druhá Guldinova věta (o objemu rotačního tělesa):**

**Objem rotačního tělesa je dán součinem obsahu tvořící plochy a délky kružnice opsané při rotaci jejím těžištěm:**

$$V = S \cdot 2 \cdot \pi \cdot r_T.$$

<sup>1</sup> Paul Guldin (Guldinus, 1577-1643), švýcarský jezuitský matematik a astronom. Pappus z Alexandrie (asi 290 – asi 350), jeden z posledních řeckých starověkých matematiků..



Obr. 86  $l$  – délka tvořící čáry,  $T$  – těžiště tvořící čáry,  $o$  – osa rotace

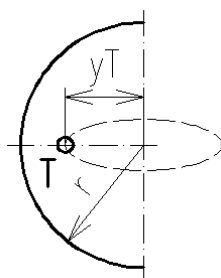
Obr. 87  $S$  – tvořící plocha (obsah),  $T$  – těžiště tvořící plochy,  $o$  – osa rotace

**Příklad:**

Pomocí první Guldinovy věty odvoďte vztah pro povrch koule.

**Řešení:**

Kulová plocha vznikne rotací půlkružnice:



$$S = l \cdot 2 \cdot \pi \cdot r_T = \pi \cdot r \cdot 2 \cdot \pi \cdot r \cdot \frac{\sin 90}{\pi} = \underline{4 \cdot \pi \cdot r^2}.$$

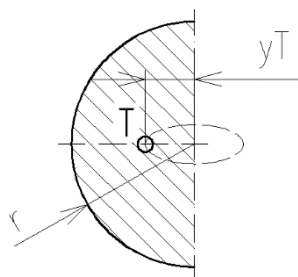
Obr. 88

**Příklad:**

Pomocí druhé Guldinovy věty odvoďte vztah pro polohu těžiště půlkruhu.

**Řešení:**

Pro řešení je třeba si uvědomit, že koule vznikne rotací půlkruhu:



Objem koule:

$$V = \frac{4}{3} \cdot \pi \cdot r^3$$

Z druhé Guldinovy věty:

$$V = S \cdot 2 \cdot \pi \cdot r_T; \text{ tedy } \frac{4}{3} \cdot \pi \cdot r^3 = \frac{1}{2} \cdot \pi \cdot r^2 \cdot 2 \cdot \pi \cdot r_T$$

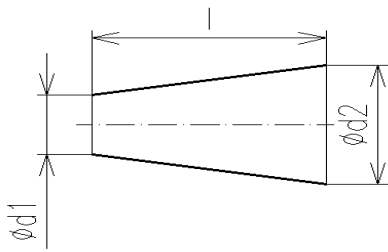
$$\underline{r_T = \frac{4}{3} \cdot \frac{r}{\pi}}$$

Obr. 89



**Příklad:**

Vypočítejte hmotnost nátrubku vyrobeného z plechu tl. 2 mm s hustotou  $7\,800\text{ kg}\cdot\text{m}^{-3}$ . Průměry  $d_1 = 100\text{ mm}$ ,  $d_2 = 200\text{ mm}$ , délka  $l = 300\text{ mm}$ .



Obr. 90

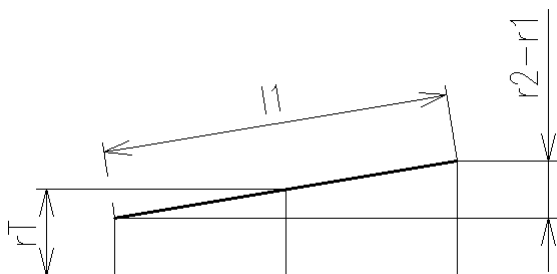
**Řešení:**

Pomocí první Guldinovy věty vypočteme povrch nátrubku a vynásobením tloušťkou dostaneme objem tělesa:

poloměr těžiště tvořící čáry:

$$r_T = \frac{r_1 + r_2}{2} = \frac{50 + 100}{2} = 75\text{ (mm)},$$

délka tvořící čáry:



$$l_1 = \sqrt{l^2 + (r_2 - r_1)^2} = \sqrt{300^2 + 50^2} = 304,14\text{ (mm)},$$

povrch nátrubku:

$$S = l_1 \cdot 2 \cdot \pi \cdot r_T = 304,14 \cdot 2 \cdot \pi \cdot 75 = 143\,322,6\text{ (mm}^2\text{)},$$

Obr. 91

hmotnost:

$$m = V \cdot \rho = S \cdot t \cdot \rho = 0,1433 \cdot 0,002 \cdot 7\,800 \doteq \underline{\underline{2,24\text{ (kg)}}}.$$

**Otázky:**

1. Jak byste upravili polohu těžiště lodi?
2. Je geometrické středisko totožné s těžištěm?
3. Co znamená pojem „homogenní těleso“?
4. K čemu slouží Guldinovy věty?

## 10. PRUTOVÉ SOUSTAVY

Obsah této kapitoly:

- Příhradová konstrukce
- Rovnováha sil ve styčnicku
- Styčnicková metoda a Cremonův diagram
- Průsečná (Ritterova) metoda

### Příhradová konstrukce



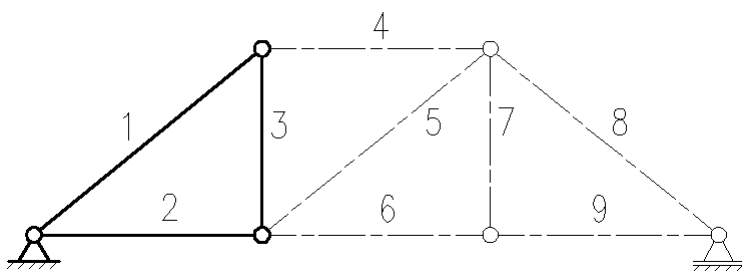
Prutové soustavy (realizované jako příhradové konstrukce) se používají u jeřábů, mostů, sloupů, střešních konstrukcí apod. Skládají se z prutů<sup>1</sup>, spojených v tzv. styčnicích, které s vyhovující přesností nahrazujeme při řešení kloubem. Ve skutečnosti jsou pruty (profily nebo trubky) např. svařené buď vzájemně, nebo se styčnickovými plechy, dalšími druhy spojů mohou být spoje šroubové, lepené, případně nýtové. Příhradové konstrukce jsou lehčí než plnostěnné.

---

**Zejména příhradové nosníky jsou často rovinné, takže vnější síly (vnější zatížení a vazbové síly) tvoří rovinnou soustavu sil. Jednotlivé pruty tvoří nejčastěji trojúhelníky. Tím je zajištěna statická a tvarová určitost.**

---

Obr. 92



Podmínka statické a tvarové určitosti (a tedy řešitelnosti metodami statiky) má tvar

$$p = 3 + 2(s - 3) = 2s - 3,$$

kde  $p$  je počet prutů a  $s$  počet styčníků.

Obr. 93



Zvětší-li se počet prutů ze základních 3 např. na  $3 + 6 = 9$ , vzroste počet styčníků ze 3 na  $3 + 3 = 6$ , tedy počet prutů = 3 pruty + dvojnásobek přírůstku počtu styčníků.  $9 = 3 + 2(6 - 3)$ , obecně  $p = 3 + 2(s - 3) = 2s - 3$ .

### Rovnováha sil ve styčnicku

Vnější síly, tedy vnější zatížení a síly vazbové, vyvolávají v jednotlivých prutech síly vnitřní. Pokud je soustava zatížena ve styčnicích a osy prutů se protínají ve společném bodě, jsou síly v prutech pouze osové<sup>2</sup>, a to **tahové** (pruty nazýváme táhla) nebo **tlakové** (vzpery).

---

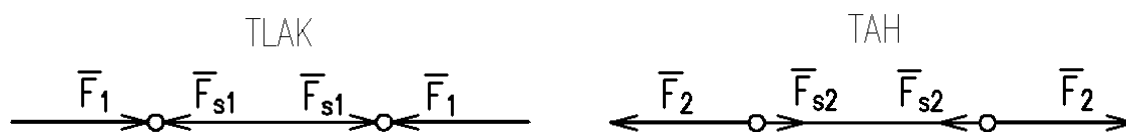
**Řešení sil ve styčnicku je základní úlohou statiky – úloha o rovnováze sil, jejichž nositelky procházejí společným bodem.**

---

<sup>1</sup> Konstruktivní prvek, jehož délka je výrazně větší než příčné rozměry.

<sup>2</sup> Pruty pak tvoří tzv. binární skupiny.

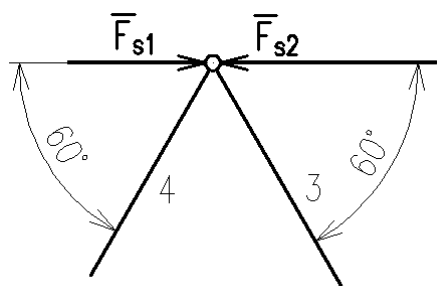
Podle smyslu sil určíme způsob namáhání prutů. Síly s indexem  $s$  jsou silami vnitřními a představují reakce na vnější zatížení. Protože prut je v rovnováze, musí na jeho druhém konci působit síla stejně velká a opačná, která působí v druhém styčnicku.



Obr. 94

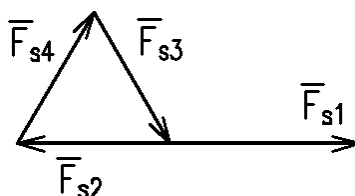
**Příklad:**

V prutech 1 a 2 styčnicku prutové soustavy působí síly o velikostech  $F_{s1} = 50$  kN a  $F_{s2} = 90$  kN. Zjistěte velikost a smysl sil v prutech 3 a 4 a určete namáhání všech prutů.



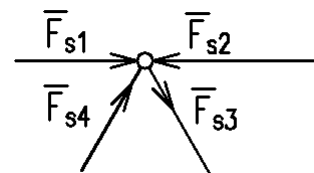
**Řešení grafické:**

Měřítka sil např.  $m_F = 1$  kN.mm<sup>-1</sup>.



Obr. 95

Obr. 96

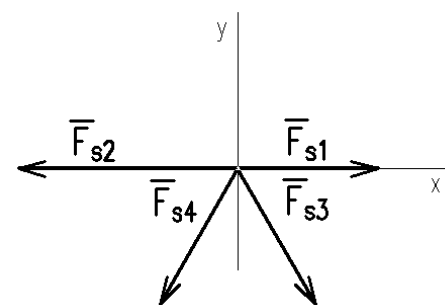


Výsledky:  $F_{s3} = F_{s4} = 40$  kN, pruty 1, 2 a 4 jsou namáhány na tlak (vzpěry), prut 3 na tah (táhlo).

Obr. 97

**Řešení početní:**

Neznámé síly pokládáme za kladné (tahové).



$$\sum F_{ix} = 0,$$

$$F_{s1} - F_{s2} + F_{s3} \cos 60^\circ - F_{s4} \cos 60^\circ = 0,$$

$$\sum F_{iy} = 0,$$

$$F_{s3} \sin 60^\circ + F_{s4} \sin 60^\circ = 0, F_{s3} = -F_{s4}.$$

Obr. 98

$$F_{s1} - F_{s2} + F_{s3} \cos 60^\circ + F_{s3} \cos 60^\circ = 0, F_{s1} - F_{s2} + 2F_{s3} \cos 60^\circ = 0,$$

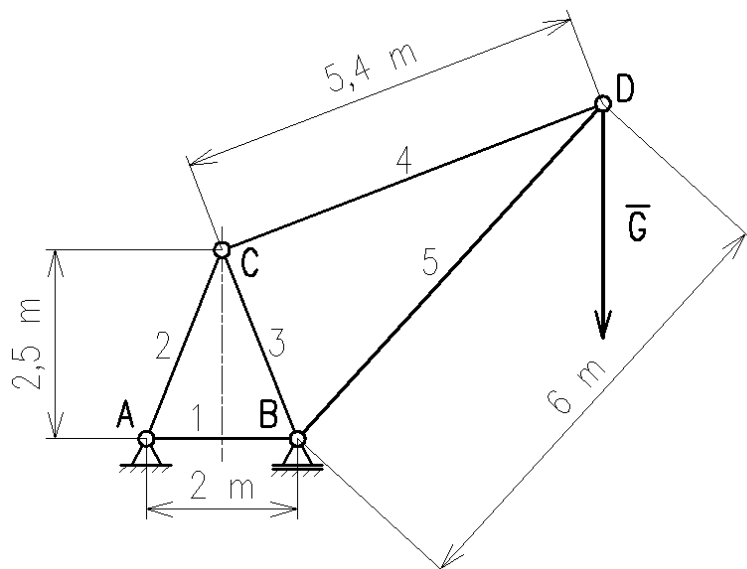
$$F_{s3} = \frac{F_{s2} - F_{s1}}{2 \cos 60^\circ} = \frac{90 \text{ kN} - 50 \text{ kN}}{2 \cos 60^\circ} = 40 \text{ (kN)}, F_{s4} = -F_{s3} = -40 \text{ (kN)} - \text{opačný smysl.}$$

## 🔊 Styčnicková metoda a Cremonův diagram

Styčnicková metoda (grafická i početní) spočívá v nalezení rovnováhy jednotlivých styčníků. Úlohu začneme řešením vazbových sil (musíme určit vnější síly působící na soustavu). Dále pokračujeme styčnickem, který je zatížen známou vnější silou a v němž jsou nejvýš dvě neznámé vnitřní síly.

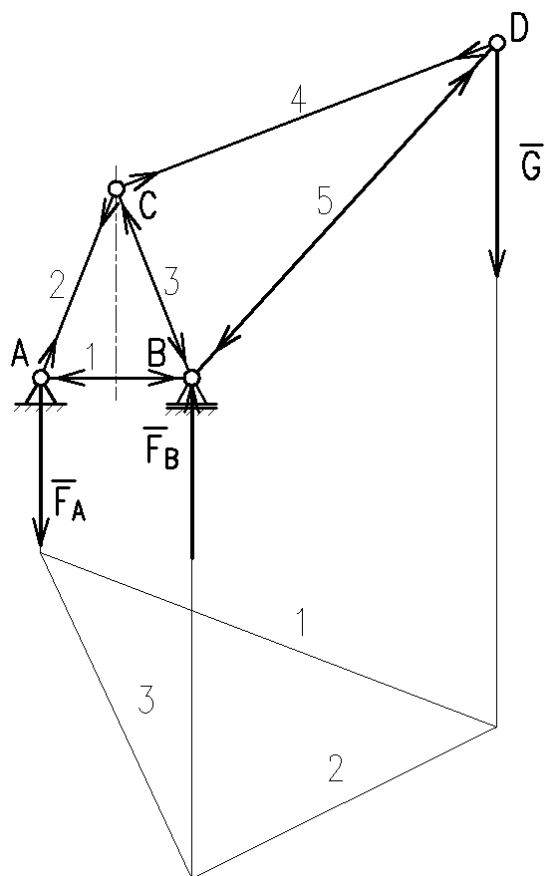
### Příklad:

Určete vnitřní síly a namáhání prutů jeřabové konstrukce.  $G = 30 \text{ kN}$ .



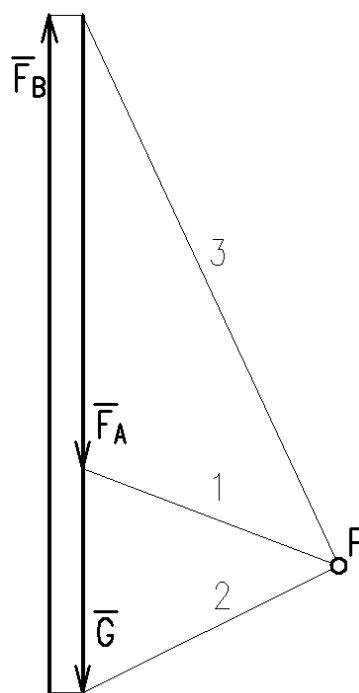
M 1:100  
 $m_F = 1 \text{ kN}\cdot\text{mm}^{-1}$

Obr. 99



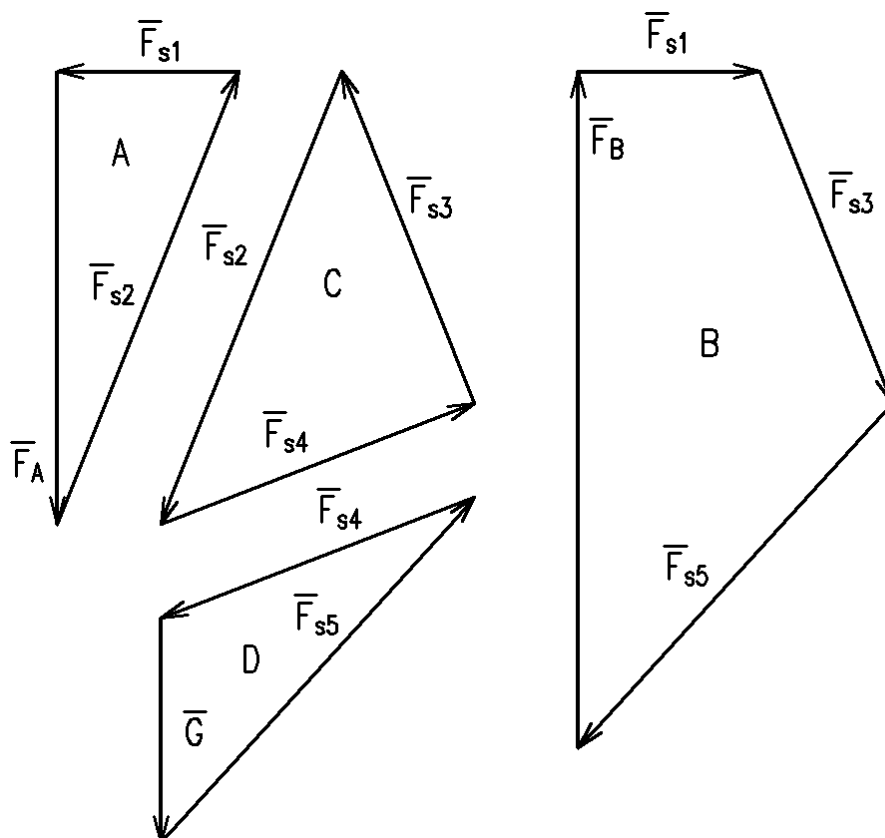
### Řešení:

(uvedeme pouze grafické, početní je pak zřejmé z předchozí úlohy a z dřívějšího učiva).



$F_A = 60,6 \text{ kN}$ ,  
 $F_B = 90,6 \text{ kN}$ .

Obr. 100



Obr. 101

Síla	Velikost (kN)	Tah +/Tlak -
<b>G</b>	30	
<b>F<sub>A</sub></b>	60,6	
<b>F<sub>B</sub></b>	90,6	
<b>F<sub>s1</sub></b>	24,2	-
<b>F<sub>s2</sub></b>	65,3	+
<b>F<sub>s3</sub></b>	47,9	-
<b>F<sub>s4</sub></b>	45,0	+
<b>F<sub>s5</sub></b>	62,4	-

Ze silových mnohoúhelníků je vidět, že sousední mnohoúhelníky mají společnou sílu. Značnou úsporu tedy představuje kreslení těchto silových mnohoúhelníků pohromadě v tzv. **Cremonově<sup>1</sup> diagramu**.

---

**V Cremonově diagramu kreslíme každou vnitřní sílu pouze jednou, bez šipek, šipky doplňujeme průběžně do prutové soustavy.**

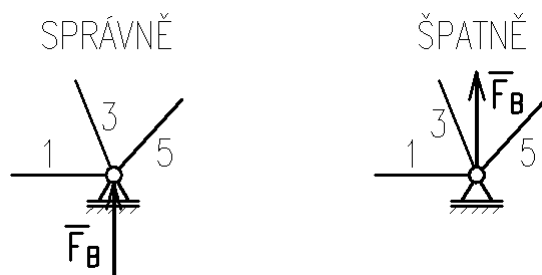
---

Naprosto nutné je dodržet tento postup:

1. Vnější síly uspořádáme za sebou ve zvoleném smyslu obcházení prutové soustavy po obvodu (někdy nám tento smysl určí už grafické řešení vazbových sil a není nutno jej měnit; v našem příkladu se jedná o smysl pohybu hodinových ručiček).
2. Osově síly v jednotlivých styčnicích řadíme za sebou ve stejném smyslu obcházení; vnější síly klademe vně obvodových prutů (viz obr.).

---

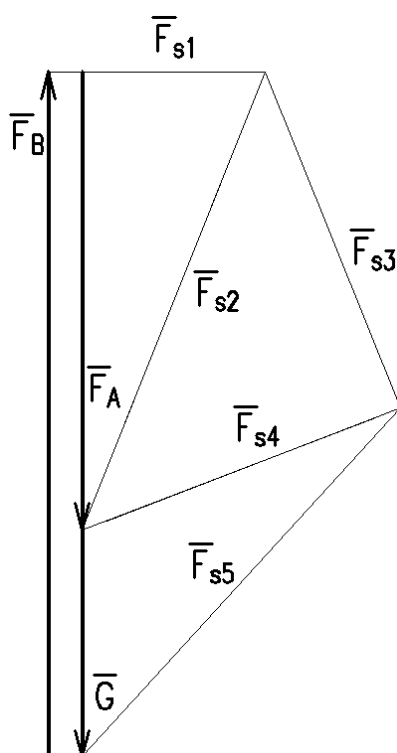
<sup>1</sup> Luigi Cremona (1830-1903), italský matematik, člen korespondent Královské společnosti v Londýně, člen Královské švédské akademie věd.



Obr. 102

3. Začínáme styčником, v němž známe vnější sílu a v němž jsou nejvýš dvě neznámé síly vnitřní.

Cremonův diagram pro daný příklad:



Obr. 103

### Průsečná (Ritterova) metoda

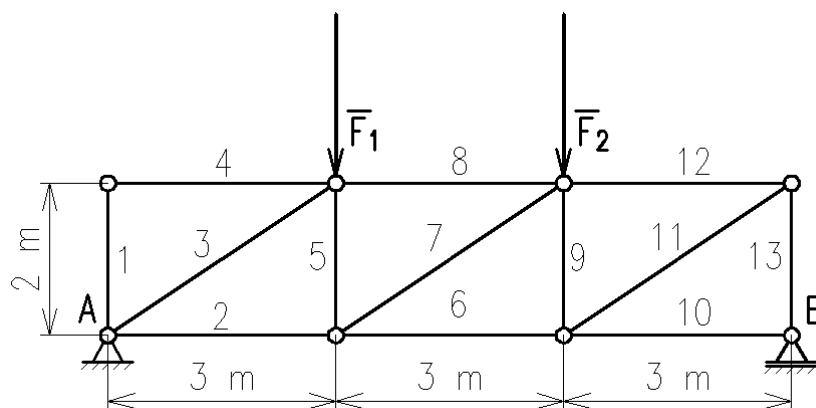
Průsečná (též řezová, Ritterova) metoda představuje možnost, jak početně řešit buď celou soustavu, nebo jen některé vnitřní síly.

1. Myšleným řezem přerušíme nejvýše tři pruty (v rovině máme tři podmínky rovnováhy), z nichž pouze dva mohou vycházet z jednoho styčniku, a odříznutou část soustavy nahradíme vnitřními silami v těchto prutech.
2. Připojené síly jsou pro ponechanou část soustavy silami vnějšími. Řešíme je ze statických podmínek rovnováhy.

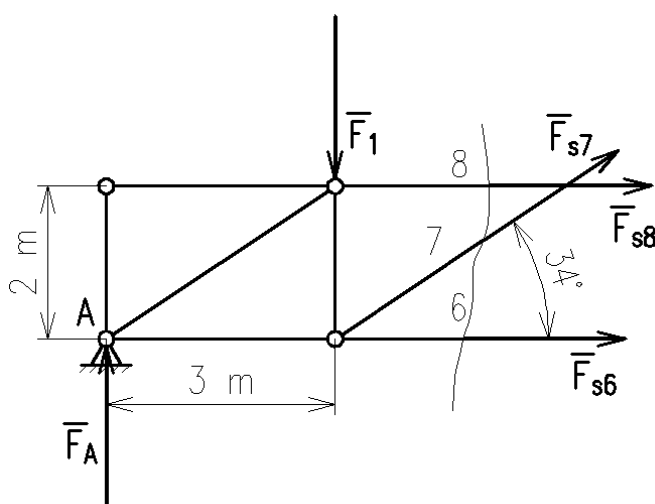
#### Příklad:

Zjistěte síly, které působí v prutech 6, 7, 8 soustavy, a určete namáhání těchto prutů.

$$F_1 = F_2 = 25 \text{ kN.}$$



Obr. 104



Obr. 105

**Řešení:**

Podle uvedeného postupu nahradíme odříznutou část silami – předpokládáme všechny kladné (tahové).

Vazbové síly:  $F_A = F_B = 25 \text{ kN}$ .

Úhel prutů 6 a 7:

$$\tan \alpha = \frac{2}{3}, \alpha = 34^\circ.$$

Podmínky rovnováhy pro ponechanou část soustavy:

$$\sum F_{ix} = 0; F_{s6} + F_{s8} + F_{s7} \cos 34^\circ = 0,$$

$$\sum F_{iy} = 0; F_1 - F_A - F_{s7} \sin 34^\circ = 0,$$

$$\sum M_{iA} = 0; F_1 \cdot 3 \text{ m} + F_{s8} \cdot 2 \text{ m} - F_{s7} \cdot 3 \text{ m} \cdot \sin 34^\circ = 0.$$

Ze druhé rovnice plyne, že  $F_{s7} = 0$  (protože  $F_1 = F_A$ ).

$$F_{s8} = -\frac{3}{2}F_1 = -\frac{3}{2} \cdot 25 \text{ kN} = \underline{\underline{-37,5 \text{ (kN)}}}.$$

$$F_{s6} = -F_{s8} = \underline{\underline{37,5 \text{ (kN)}}}.$$

Síla v prutu 8 působí opačně než jsme předpokládali (tlak), síla v prutu 6 je tahová.

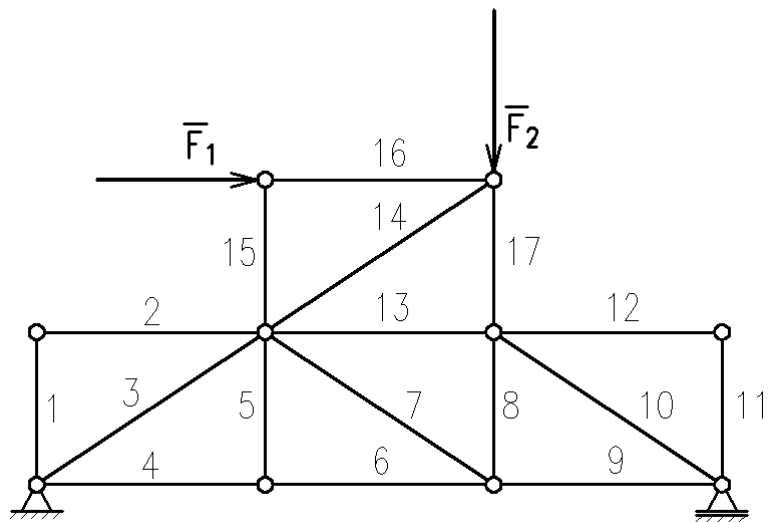


*Je-li nosník zatížen spojitým břemenem, nahradíme je osamělými silami v jednotlivých styčnicích.*



### Otázky a úkoly

1. Rozdělte metody řešení prutových soustav na grafické a početní.
2. Uveďte postup při sestavování Cremonova diagramu.
3. Jak poznáme tvarovou a statickou určitost soustavy?
4. Ve kterých prutech dané soustavy budou nulové síly a proč?



Obr. 106



## 11. STATIKA PASIVNÍCH ODPORŮ (TŘENÍ)

Obsah této kapitoly:

- Druhy a význam pasivních odporů
- Smykové tření na vodorovné rovině, zákon smykového tření
- Smykové tření na nakloněné rovině, šroub
- Čepové tření
- Vlákňové tření
- Valivé tření

### 🔊) Druhy a význam pasivních odporů



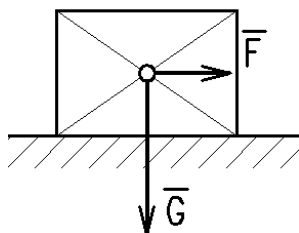
Pojem pasivní odpory zahrnuje různé druhy **tření**. Základními typy třecích odporů jsou odpor **smykového tření** a **odpor valivý** (tření valivé). Smykovému tření jsou příbuzná **tření čepové** (čep v kluzném ložisku) a **tření vláknové** (tření řemenů, dopravních pásů a lan).

V některých případech se snažíme tření co nejvíce omezit, v jiných zvýšit, ale současně zabránit nadměrnému opotřebení. Do první skupiny problémů patří především různé druhy uložení (ložiska a vedení), protože zde je tření příčinou nežádoucích ztrát energie<sup>1</sup>. Do druhé skupiny patří brzdy, třecí spojky, třecí a řemenové převody, pneumatiky atd. Tření je také základem šroubových, klínových, svěrných a tlakových spojů.

Obr. 107

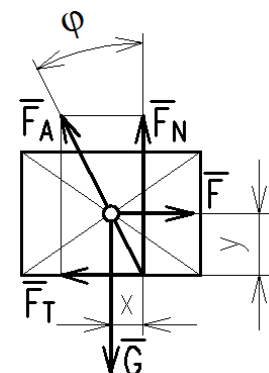
### 🔊) Smykové tření na vodorovné rovině, zákon smykového tření

Třecí odpor vyjadřujeme **třecí silou**, která působí tečně ke stykové ploše a má směr opačný k relativnímu pohybu tělesa, nebo snaze o tento pohyb (tření tzv. „za klidu“, přesněji na mezi pohybu).



Tření způsobuje, že i k rovnoměrnému přímočarému pohybu tělesa potřebujeme hnací sílu. Protože je těleso v rovnováze (klid nebo rovnoměrný přímočarý pohyb), můžeme sestavit podmínky rovnováhy.

Obr. 108



K řešení použijeme metodu uvolňování. Těleso uvolníme a zavedeme **vazbovou sílu**  $F_A$ . Vlivem tření se vazbová síla odkloní proti směru relativního pohybu o **třecí úhel**  $\varphi$ . Jednou její složkou bude **třecí síla**  $F_T$  a druhou složkou **síla normálová**  $F_N$  (kolmá ke směru pohybu).

$$\begin{aligned} \sum F_{ix} = 0: F - F_T &= 0, \\ \sum F_{iy} = 0: G - F_N &= 0, \\ \sum M_i = 0: F_N \cdot x - F_T \cdot y &= 0. \end{aligned}$$

Obr. 109

<sup>1</sup> Třením a mazáním se zabývá vědní obor tribologie, konkrétní aplikace jsou pak záležitostí tribotechniky.

Momentová rovnice představuje rovnováhu dvou silových dvojic (první tvoří síly  $G$ ,  $F_N$  a druhou  $F$ ,  $F_T$ ). Po úpravě úměry dostaneme:

$$\frac{F_T}{F_N} = \frac{x}{y} = \tan \varphi.$$

**Tangenta třecího úhlu udává velikost součinitele tření ( $f = \tan \varphi$ ) a celá rovnice přejde v zákon smykového tření:**

$$F_T = F_N \cdot f.$$

**Místo momentové věty tedy píšeme zákon smykového tření.**

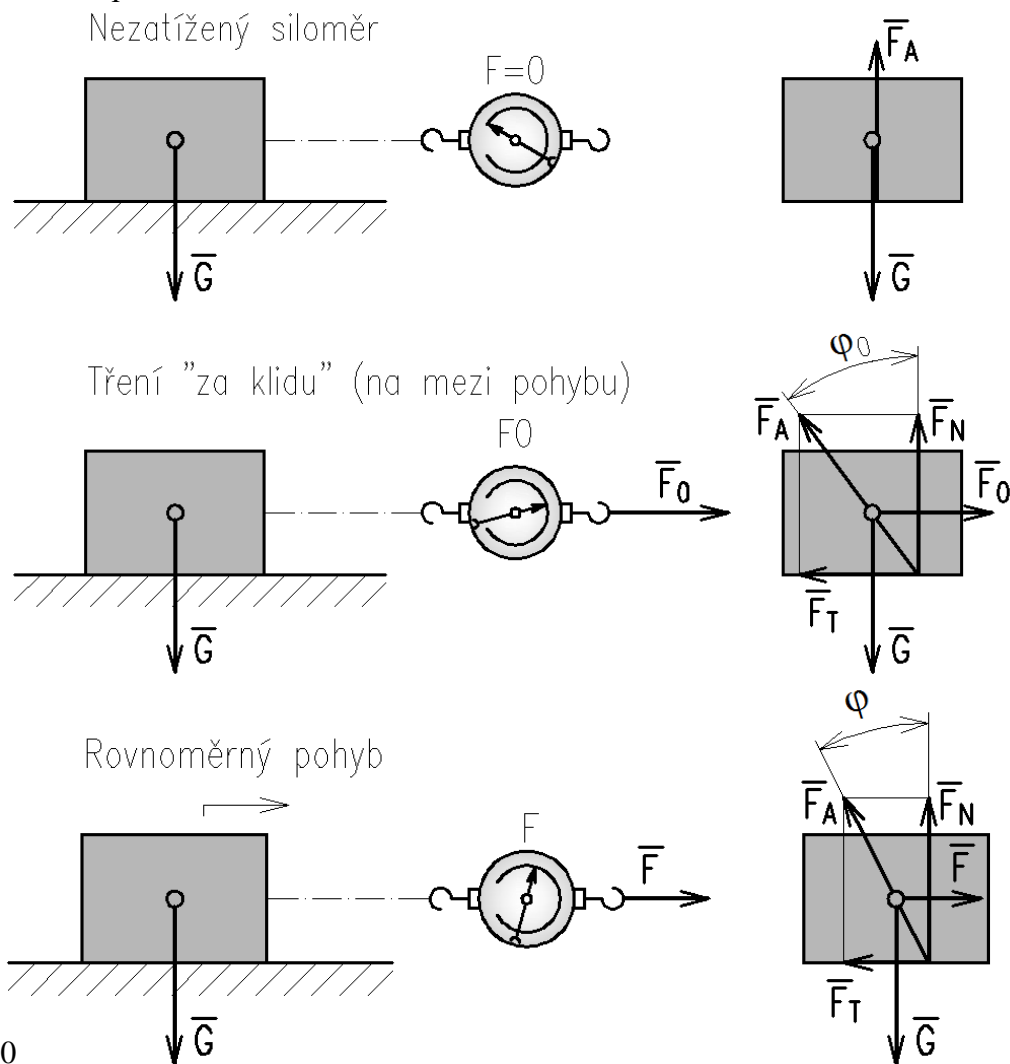
Z výše uvedených rovnic plyne:

$$F = F_T, F_N = G,$$

takže

$$F = G \cdot f, \text{ popř. } F_0 = G \cdot f_0 \text{ (za klidu, kdy } f_0 > f).$$

Zjišťování tření pokusem<sup>1</sup>:



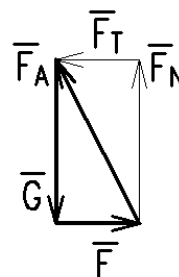
Obr. 110

<sup>1</sup> Při přechodu z klidu do pohybu dojde nejprve k poklesu součinitele tření, pak k vzestupu a poté se součinitel udržuje za nezměněných podmínek přibližně na konstantní hodnotě nižší než na mezi pohybu.

Na mezi pohybu je součinitel tření  $f_0$  větší než  $f$ , protože dochází ke kontaktu povrchových nerovností, u velmi hladkých povrchů se projevují i mezimolekulární síly.



Graficky úlohu vyřešíme, uvědomíme-li si, že síly  $F$ ,  $G$ ,  $F_A$  jsou v rovnováze, musejí tedy procházet společným bodem a tvořit uzavřený silový trojúhelník se šipkami v jednom sledu<sup>1</sup>. Obrázek doplňuje i výše uvedené rovnice.



Obr. 111

**Součinitel tření závisí především na:**

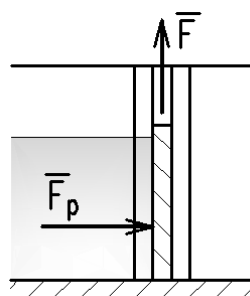
- dvojici materiálů,
- kvalitě povrchu,
- přítomnosti jiné látky (vlhkost, mazivo aj.).

Dále na teplotě a na rychlosti (při vyšších rychlostech).



Ve strojnických tabulkách nalezneme hodnoty součinitelů tření pro jednotlivé kombinace materiálů uvedené v širokém rozsahu. Je to právě proto, že součinitel tření závisí na místních okamžitých podmínkách. Jeho přesné určení je možné jen experimentálně.

**Příklad:**

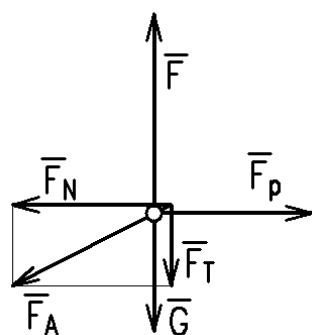


Stavidlo o hmotnosti  $m = 600$  kg je vystaveno tlakové síle vody  $F_p = 38\,000$  N. Součinitel tření ve vedení je  $f = 0,4$ . Určete sílu potřebnou pro rovnoměrné zvedání stavidla.

**Řešení:**

Stavidlo uvolníme a zavedeme vnější síly ( $G$ ,  $F_p$ ) i složky vazbové síly  $F_T$  a  $F_N$ . Napíšeme statické podmínky rovnováhy a zákon smykového tření.

Obr. 112



Složkové podmínky rovnováhy a zákon smykového tření:

$$\begin{aligned} \sum F_{ix} = 0 : F_p - F_N &= 0, \\ \sum F_{iy} = 0 : F - G - F_T &= 0, \\ F_T &= F_N \cdot f. \end{aligned}$$

Řešením rovnic dostaneme:

$$\begin{aligned} F - G - F_N \cdot f &= 0, F_N = F_p, \\ F &= G + F_p \cdot f = 600 \cdot 9,81 + 38\,000 \cdot 0,4 = \underline{\underline{21\,086 \text{ (N)}}}. \end{aligned}$$

Obr. 113

Grafické řešení načrtněte samostatně.

<sup>1</sup> Pravidla pro tři síly v rovnováze.

## 🔊) Smykové tření na nakloněné rovině, šroub



Obr. 114

Nakloněná rovina je jednoduchý stroj, usnadňující zvedání břemen, a je základem klínu a šroubu.

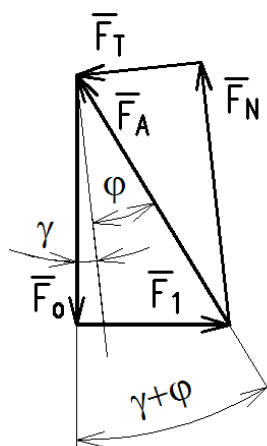
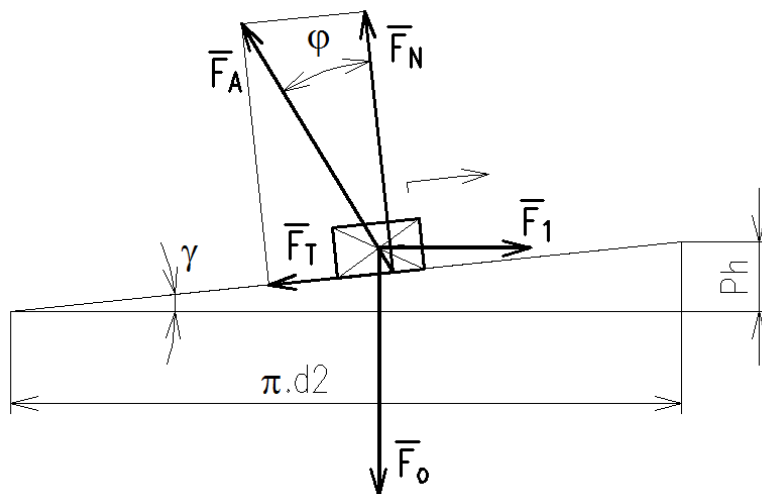
Závit šroubu jako představitel využití principu nakloněné roviny je vlastně nakloněnou rovinou navinutou na válec podle šroubovice. Závity se dělí na ploché (na obrázku závit šroubové podpory), ostré (např. metrický) a oblé. Nejjednodušší aplikací je plochý závit.

Řešení je zcela analogické rovině vodorovné (tj. uvolnění tělesa, zavedení vazbové síly). Řešením pohybu dolů po nakloněné rovině dojdeme k pojmu samosvornosti<sup>1</sup>.

### a) utahování šroubu s plochým závitem<sup>2</sup>, příp. zvedání břemene šroubovým zvedákem:



Obr. 115



Obr. 116

$F_0$  – osová síla (nebo tíha břemene u zvedáku či podpěry)  
 $F_1$  – utahovací obvodová síla na středním průměru závitu

Z pravoúhlého trojúhelníka plyne:

$$\underline{F_1 = F_0 \cdot \tan(\gamma + \varphi)}.$$

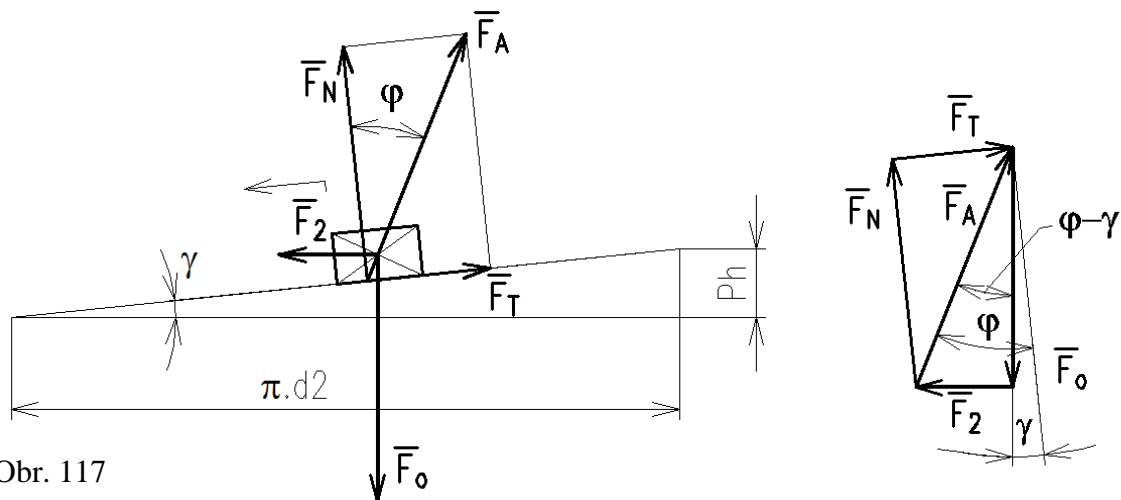
K rovnici bychom samozřejmě dospěli i rozkladem sil do směrů souřadných os, ale takto je tento výpočet jednodušší.

<sup>1</sup> Po samosvorné nakloněné rovině těleso samovolně účinkem tíhy nesjede, po nesamosvorné ano. Samosvorný šroub slouží jako spojovací (samovolně se nepovolí), případně jako šroub zvedáku.

<sup>2</sup> Při výpočtu šroubu s ostrým závitem má významný vliv i vrcholový úhel (např. 60° u metrického závitu).

a) povolování šroubu s plochým závitem<sup>1</sup>, příp. spouštění břemene na šroubovém zvedáku:

Předpokládáme v souladu s úvodním obrázkem samosvorný závít, tj. nuceně povolovaný. Obvodová síla bude působit opačně.



Obr. 117

Z pravoúhlého trojúhelníka plyne:

$$\underline{F_1 = F_0 \cdot \tan(\varphi - \gamma)}.$$

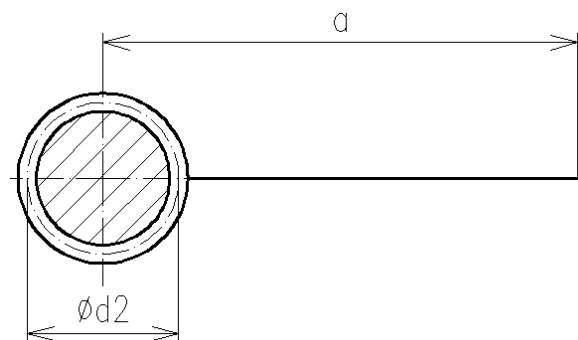
**Závěr:** obě rovnice můžeme přepsat ve sjednoceném tvaru:

$$\underline{F_{1,2} = F_0 \cdot \tan(\gamma \pm \varphi)}.$$

Znaménko + platí pro zvedání (utahování), znaménko – pro spouštění (povolování). Vyjde-li pak při povolování závitu síla  $F_2$  kladná ( $\gamma > \varphi$ ), působí stejně jako síla při utahování. Brzdí tedy samovolný pohyb břemene na nakloněné rovině a šroub je tedy nesamosvorný.

Vyjde-li síla  $F_2$  záporná ( $\gamma < \varphi$ ), znamená to, že břemeno je třeba nuceně spouštět (šroub povolovat), jedná se o samosvornost nakloněné roviny a šroubu.

**Příklad:**



Obr. 118

Vypočtete délku ramene  $a$  páky šroubového zvedáku pro zvedání břemene a potřebnou sílu  $F_B$  na páce pro spouštění. Břemeno má tíhu  $G = 8\,200\text{ N}$ , síla na konci páky při zvedání je  $F_A = 34,6\text{ N}$ . Šroub má plochý závít se středním průměrem  $d_2 = 52\text{ mm}$  a stoupání  $P_h = 6\text{ mm}$ . Součinitel smykového tření je  $f = 0,1$ .

<sup>1</sup> Při výpočtu šroubu s ostrým závitem má významný vliv i vrcholový úhel (např.  $60^\circ$  u metrického závitu).

### Řešení:



Nejprve pomocí momentové věty vyjádříme délku ramene páky:

$$F_A \cdot a - F_1 \cdot \frac{d_2}{2} = 0.$$

Sílu  $F_1$  vypočítáme ze silových poměrů v plochem závitu:

$$F_1 = F_0 \cdot \tan(\gamma + \varphi).$$

Úhel stoupání a třecí úhel<sup>1</sup>:

$$\gamma = \tan^{-1} \frac{P_h}{\pi d_2} = \tan^{-1} \frac{6}{\pi \cdot 52} = 2,103^\circ; \varphi = \tan^{-1} 0,1 = 5,711^\circ$$

Obr. 119

Výpočet:

$$F_1 = G \cdot \tan(\gamma + \varphi) = 8\,200 \cdot \tan(2,103 + 5,711) = 1\,125,30 \text{ (N)},$$

$$a = \frac{F_1}{F_A} \cdot \frac{d_2}{2} = \frac{1\,125,30}{34,6} \cdot \frac{52}{2} = \underline{845,6 \text{ (mm)}}.$$

Síla v závitu pro spouštění:

$$F_2 = G \cdot \tan(\gamma - \varphi) = 8\,200 \cdot \tan(2,103 - 5,711) = \underline{-517,05 \text{ (N)}}.$$

Šroub je samosvorný.

Síla na páce:

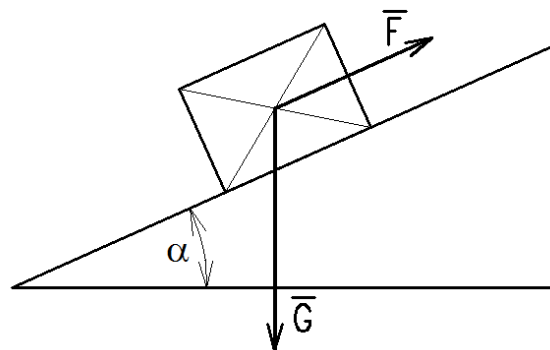
$$F_B = F_2 \cdot \frac{d_2}{2a} = 517,05 \cdot \frac{52}{2 \cdot 846} = \underline{15,9 \text{ (N)}}.$$



Řešení silových poměrů na šroubu vychází z pravoúhlého trojúhelníka, ale tyto úlohy je možno řešit zcela obecně jako silovou soustavu různoběžných sil. Souřadný systém zavedeme s výhodou tak, že osa  $x$  je rovnoběžná s nakloněnou rovinou.

### Příklad:

Odvoďte vztah pro sílu, která je potřebná pro zvedání břemene v daném případě.

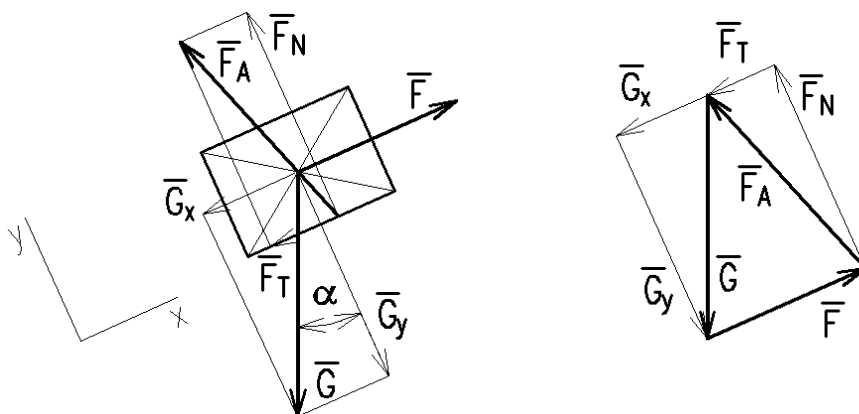


Obr. 120

<sup>1</sup> Součinitel tření je roven tangente třecího úhlu.

### Řešení:

Břemeno uvolníme:



Obr. 121

Výpočet:

$$\sum F_{ix} = 0 : F - G \sin \alpha - F_T = 0,$$
$$\sum F_{iy} = 0 : G \cos \alpha - F_N = 0,$$
$$F_T = F_N \cdot f.$$

Po dosazení z 2. a 3. rovnice do 1.:

$$F - G \sin \alpha - Gf \cos \alpha = 0 \Rightarrow \underline{F = G \cdot (\sin \alpha + f \cos \alpha)}.$$

### Čepové tření



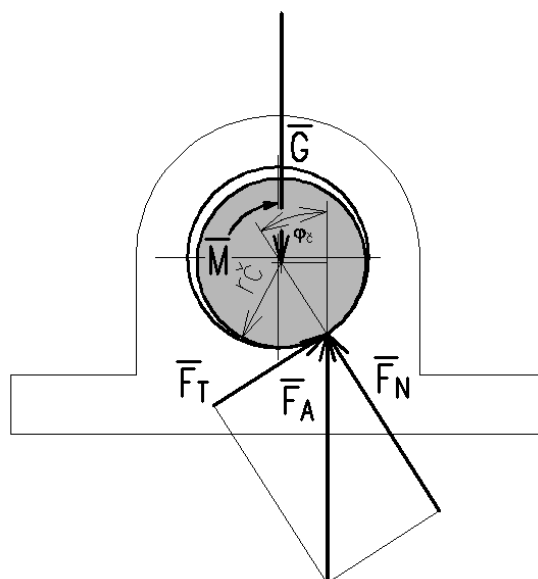
S čepovým třením se setkáme v kluzných ložiskách, která se proto musí dobře mazat. Při pohybu v radiálním ložisku dochází k odvalení čepu po pánvi a působitě vazbové síly se posune proti směru otáčení. Tím vznikne silová dvojice, jejíž rameno je úměrné tření, vyjádřenému součinitelem čepového tření  $f_{\check{c}}$ .

Obr. 122

Odpor čepového tření vyjadřujeme kvantitativně momentem čepového tření  $M_{\check{c}}$ . V **radiálním ložisku** se jedná o moment dvojice  $F_A - G$ :

$$M_{\check{c}} = G \cdot r_{\check{c}} \cdot \sin \varphi_{\check{c}}.$$

Úhel  $\varphi_{\check{c}}$  je třecí úhel čepového tření a jeho tangens je součinitel čepového tření:  $f_{\check{c}} = \tan \varphi_{\check{c}}$ .



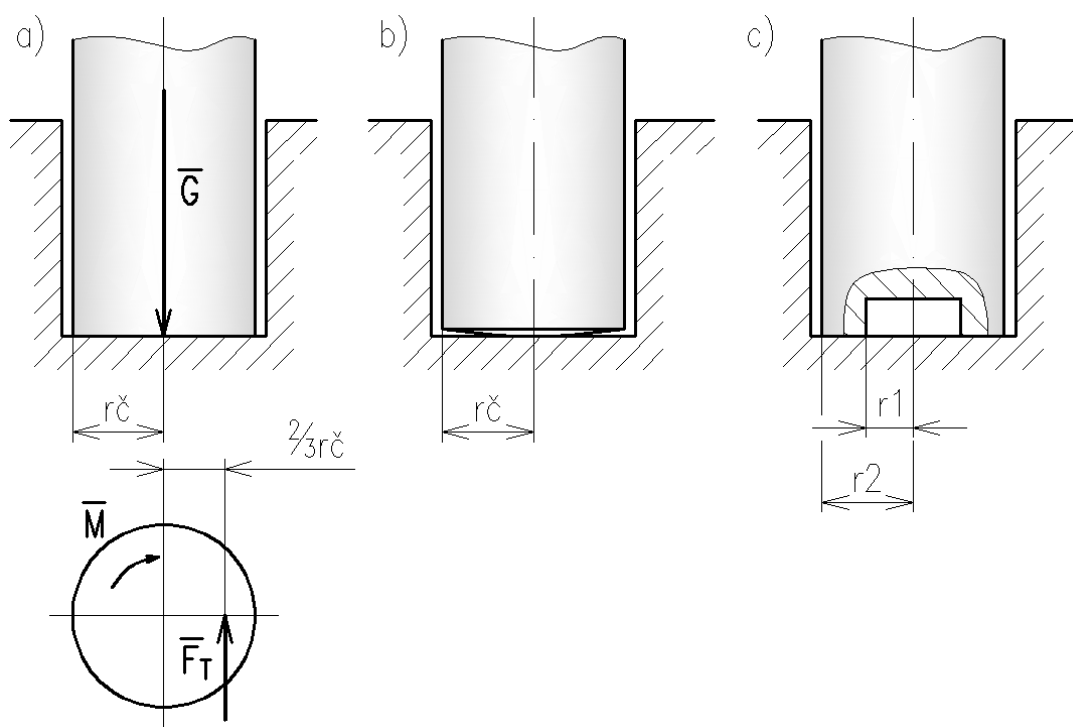
Obr. 123

Protože při malých úhlech je tangens úhlu roven sinu, můžeme psát přímo:

$$M_{\xi} = G \cdot r_{\xi} \cdot f_{\xi}.$$

Tento moment čepového tření musíme při rovnoměrné rotaci překonávat hnacím momentem  $M = M_{\xi}$ .

V ložisku axiálním počítáme se součinitelem smykového tření.



Obr. 124

Na obrázku a) je **nezaběhaný axiální čep**, působí výsledná třecí síla je ve  $2/3$  poloměru čepu:

$$M_{\xi} = \frac{2}{3} \cdot G \cdot f \cdot r_{\xi}.$$

Na obrázku b) je **zaběhaný čep**, odpor je sice menší, ale opotřebení zvyšuje měrný tlak ve zmenšující se styčné ploše a dále zhoršuje kvalitu povrchu:

$$M_{\xi} = \frac{1}{2} \cdot G \cdot f \cdot r_{\xi}.$$

Na obrázku c) je **čep s vybráním**, který eliminuje nebezpečí varianty b), působí výsledná třecí síla je na středním poloměru čepu:

$$M_{\xi} = G \cdot f \cdot \frac{r_1 + r_2}{2}.$$

Axiální (v tomto případě patní) ložisko je konstrukčně mnohem složitější, většinou zachycuje i radiální sílu.



## 🔊 Vláknové tření

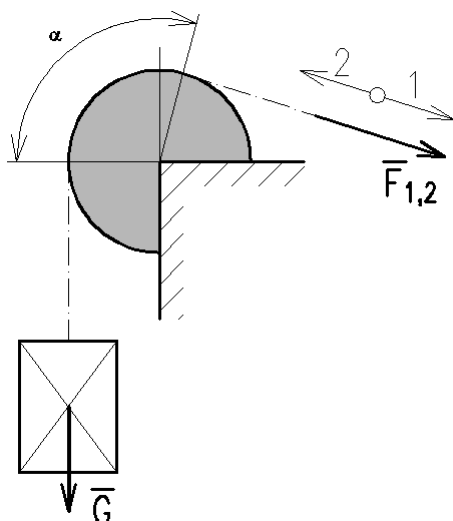


**Vláknové tření se vyskytuje při styku lan a pásů s válcovou plochou. Pás či lano může být v relativním pohybu vzhledem k válcové ploše (pásová brzda), nebo v relativním klidu (řemenový převod, pásový dopravník, kladkostroj).**

Pásová brzda na obrázku se používá u zdvihadel, dříve i jako ruční brzda u vozidel (traktory), také např. k vypínání kompresoru pístového leteckého motoru sportovních letadel atd.

Obr. 125

Při pohybu 1 lana nebo pásu po nehybném kotouči (zvedání břemene) je síla  $F_1$  větší než tíhová síla  $G$ , protože překonáváme třecí sílu<sup>1</sup>:



$$\underline{F_1 = G \cdot e^{f\alpha}}$$

Při pohybu 2 (spouštění břemene) je síla  $F_2$  menší než tíha  $G$ , protože třecí síla pomáhá brzdit pohyb:

$$\underline{F_2 = G \cdot \frac{1}{e^{f\alpha}}}$$

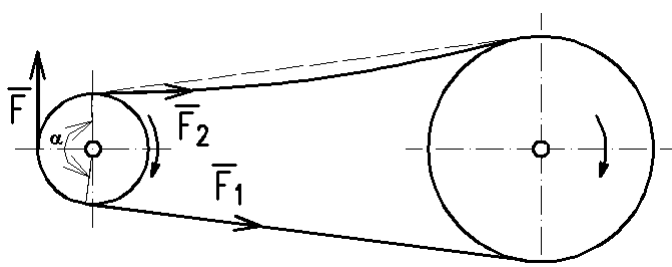
V uvedených rovnicích je  $f$  **součinitel smykového tření**,  $\alpha$  **úhel opásání** (v obloukové míře) a  $e$  **Eulerovo číslo** – základ přirozených logaritmů (přibližně 2,718).

Obr. 126



*S rostoucím úhlem opásání rostou hodnoty  $e^{f\alpha}$  velmi rychle. Např. loď se snadno udrží lanem několikrát obtočeným kolem sloupku (úhel opásání v rad je  $2\pi$  krát počet obtočení).*

### Řemenový převod plochým řemenem:



$F_1$  – síla v tažené větvi  
 $F_2$  – síla v tlačené větvi  
 $F$  – obvodová síla

$$F_1 = F_2 \cdot e^{f\alpha}$$

$$F_1 = F + F_2$$

Obr. 127

<sup>1</sup> Vláknové tření popisují matematicky dále uvedené Eulerovy vztahy.



Při náběhu na hnací řemenici je řemen namáhán větší silou než při opuštění řemenice. Tím pružný řemen mění na řemenici svoji délku a dochází ke skluzu, který je příčinou nepřesnosti řemenového převodu.



Řemenice pro ploché řemeny mívají klenutý (bombírovaný) povrch, aby se řemen za chodu vystředil a nespadával.

Obr. 128

### Valivé tření

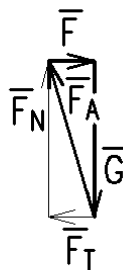
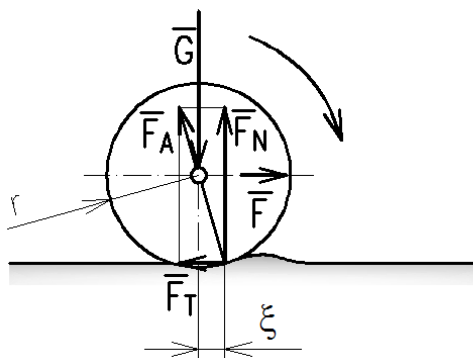


Vlivem tření a poddajnosti podložky a valíciho se tělesa vzniká v místě kontaktu třecí síla a normálová složka vazbové síly se posune tak, že působí proti pohybu. Mírou tohoto posunutí je rameno valivého odporu  $\xi$ , jehož velikost závisí na dvojici materiálů<sup>1</sup>.



Valivého tření využívají valivá ložiska (kuličková, válečková aj.), která ovšem nemohou všude nahradit ložiska klzná.

Obr. 129



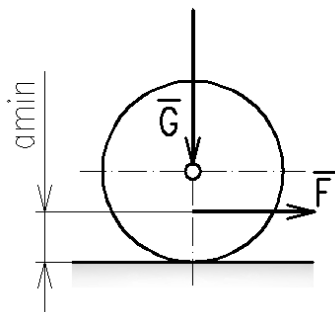
Podmínkou rovnováhy je momentová rovnice mezi dvěma silovými dvojicemi:  $G-F_N$ ,  $F-F_T$ .

$$G \cdot \xi - F \cdot r = 0$$

Po vyjádření síly potřebné pro rovnoměrné valení obdržíme:

$$F = G \cdot \frac{\xi}{r}$$

Obr. 130



Při snižování působí síly  $F$  se dostaneme do situace, že se těleso místo valení začne pouze smýkat. Určení minimálního ramene dvojice  $F-F_T$  nazýváme **podmínkou valení**. Její výpočet provedeme z **mezního stavu**, kdy síla pro valení je rovna síle pro smýkání:

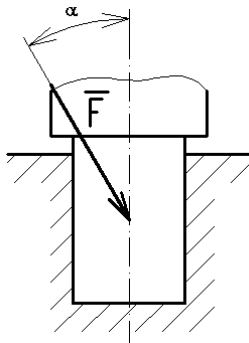
$$G \cdot \frac{\xi}{a_{min}} = G \cdot f \Rightarrow \underline{a_{min} = \frac{\xi}{f}}$$

Obr. 131

<sup>1</sup> Proto byla v historii vynalezena železnice; když vyjely první koněspřežky, zjistilo se, že kůň utáhne 10 – 30krát těžší náklad než na tehdejší nepříliš kvalitní cestě.

**Příklad:**

Vypočítejte celkový moment, potřebný k pootočení nezaběhaného patního čepu zatíženého silou o velikosti  $F = 4\,800\text{ N}$ . Síla je skloněna o úhel  $38^\circ$  od osy čepu. Průměr čepu  $d = 72\text{ mm}$ , součinitel čepového tření za klidu  $f_{\zeta 0} = 0,11$ , součinitel smykového tření za klidu  $f_0 = 0,14$ .

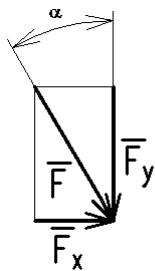


Obr. 132

**Řešení:**

Sílu rozložíme do složek  $F_x = F \cdot \sin \alpha$  a  $F_y = F \cdot \cos \alpha$ . Celkový moment čepového tření, který musíme překonat, je v rovnováze se součtem momentů tření v radiálním ložisku a v axiálním ložisku:

$$M - (M_{\zeta r} + M_{\zeta a}) = 0.$$



$$M_{\zeta r} = F_x \cdot r_{\zeta} \cdot f_{\zeta 0} = 4\,800 \cdot 0,036 \cdot 0,11 \cdot \sin 38 = 11,7 \text{ (Nm)}$$

$$M_{\zeta a} = \frac{2}{3} \cdot F_y \cdot r_{\zeta} \cdot f_0 = \frac{2}{3} \cdot 4\,800 \cdot 0,036 \cdot 0,14 \cdot \cos 38 = 12,7 \text{ (Nm)}$$

$$M = M_{\zeta r} + M_{\zeta a} = 11,7 + 12,7 = \underline{24,4 \text{ (Nm)}}$$

Obr. 133

**Příklad:**

Jakou minimální sílu  $F_1$  musí vyvinout námořník, aby lanem udržel člun, který je tažen od břehu odlivem silou  $F_2 = 8\,400\text{ N}$ . Lano je třikrát obtočeno kolem litinového sloupku,  $f_0 = 0,25$ .

**Řešení:**

Úhel opásání  $\alpha = 2\pi \cdot 3 = 18,85 \text{ (rad)}$ .

Třecí síla napomáhá udržení člunu, jedná se tedy o případ analogický spouštění břemene (viz výklad):

$$F_1 = F_2 \cdot \frac{1}{e^{f_0 \alpha}} = 8\,400 \cdot \frac{1}{e^{0,25 \cdot 18,85}} = \underline{75,5 \text{ (N)}}$$

Obr. 134

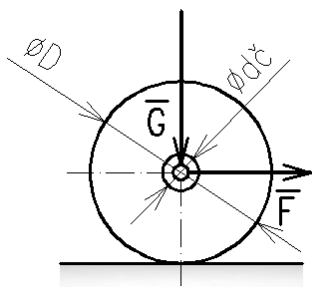
**Příklad:**

Určete sílu, která je potřebná pro pohyb jeřábu po vodorovných kolejnicích, jestliže překonáváme čepové a valivé tření. Tíha jeřábu je  $G = 430\,000\text{ N}$ . Kola jsou ocelová a mají průměr  $D = 700\text{ mm}$ , průměr ložiskových čepů je  $d_{\zeta} = 80\text{ mm}$ , součinitel čepového tření  $f_{\zeta} = 0,08$ .

**Řešení:**

Základem řešení je momentová podmínka rovnováhy:

$$F \cdot r - M_{\zeta} - G \cdot \xi = 0.$$



Rameno valivého odporu vyhledáme ve strojnických tabulkách:  
 $\xi = 0,4 \text{ mm}$ .

$$F \cdot r - G \cdot r_c \cdot f_c - G \cdot \xi = 0,$$

$$F = G \cdot \frac{r_c \cdot f_c + \xi}{r} = 430\,000 \cdot \frac{40 \cdot 0,08 + 0,4}{350} = \underline{4\,422,9 \text{ (N)}}.$$

Obr. 135



### Otázky:

1. Na obrázku motocyklu identifikujte různé druhy tření.
2. Smýká-li se jedno těleso po druhém, jaký je vztah mezi třecími silami působícími na obě tělesa?
3. Jak zní zákon smykového tření?
4. Na čem závisí velikost součinitele smykového tření?
5. Co je to samosvornost?
6. Jak postupujeme při řešení úlohy se smykovým třením?
7. Jak se vypočítá moment čepového tření?
8. Jak se liší čep zaběhaný od nezaběhaného?
9. Jaký má význam úhel opásání u řemenového převodu?
10. Jak se liší vlastnosti a mazání kluzného a valivého ložiska?

# POUŽITÁ LITERATURA

HIBBELER, R. C. *Engineering Mechanics. Statics*. Tenth Edition. Published by Pearson Education, Inc. Pearson Prentice Hall, Upper Saddle River, NJ 07458, USA.

OUWEHAND, J., DROST, A. *Werktuigbouwkunde voor het MTO. Mechanica*. The Hague, The Netherlands : by B. V. Uitgeverij Nijgh & Van Ditmar, 1984.

SZABÓ, I. *Mechanika tuhých těles a kapalin*. Přel. C. Höschl. Praha : SNTL, 1967.

TUREK, I. aj. *Sbírka úloh z mechaniky*. Praha : SNTL, 1975.

WANNER, J. *Sbírka vyřešených úloh z technické mechaniky. I. díl, statika, tření a jednoduché stroje*. Praha : Československý kompas, 1948.